

Mathematik für Informatiker II - Übungsblatt 11
Übungsgruppe D5, Do 11-13
Vogel

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)

Aufgabe 1

Die Zufallsvariable X sei $b_{n,p}$ -verteilt.

(a)

zu zeigen:

$$P_X(k) = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-k+1}{k} \cdot P_X(k-1)$$

Beweis: Bilde:

$$\begin{aligned} \frac{P_X(k)}{P_X(k-1)} &= \frac{b_{n,p}(k)}{b_{n,p}(k-1)} \\ &= \frac{\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k+1}} \\ &= \frac{n! \cdot (k-1)! \cdot (n-k+1)! \cdot p}{k! \cdot (n-k)! \cdot n! \cdot (1-p)} \\ &= \frac{(n-k+1) \cdot p}{k \cdot (1-p)} \\ &= \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-k+1}{k} \\ \Rightarrow P_X(k) &= \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-k+1}{k} \cdot P_X(k-1) \end{aligned}$$

□

(b)

$$n = 6; \quad p = \frac{1}{4}; \quad P_X(k) = b_{6, \frac{1}{4}}(k) = \binom{6}{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{6-k}$$

$$P_X(0) = \left(\frac{3}{4}\right)^6 \approx 0.1780$$

$$P_X(k) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} \cdot \frac{7-k}{k} \cdot P_X(k-1)$$

$$P_X(k) = \frac{7-k}{3k} \cdot P_X(k-1)$$

$$P_X(1) = \frac{6}{3} \cdot P_X(0) = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 \approx 0.3560$$

$$P_X(2) = \frac{5}{6} \cdot P_X(1) = \frac{5}{6} \cdot 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 \approx 0.2966$$

$$P_X(3) = \frac{4}{9} \cdot P_X(2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{20}{27} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 \approx 0.1318$$

$$P_X(4) = \frac{3}{12} \cdot P_X(3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{20}{27} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{5}{27} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 \approx 0.0330$$

$$P_X(5) = \frac{2}{15} \cdot P_X(4) = \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{27} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{2}{81} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 \approx 4.3945 \cdot 10^{-3}$$

$$P_X(6) = \frac{1}{18} \cdot P_X(5) = \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{81} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{1}{729} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 \approx 2.4414 \cdot 10^{-4}$$

(c)

$$n = 6; \quad p = \frac{1}{2}; \quad P_X(k) = b_{6, \frac{1}{2}}(k) = \binom{6}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-k} = \binom{6}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P_X(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P_X(k) = \frac{7-k}{k} \cdot P_X(k-1)$$

$$P_X(1) = 6 \cdot P_X(0) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P_X(2) = \frac{5}{2} \cdot P_X(1) = \frac{5}{2} \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P_X(3) = \frac{4}{3} \cdot P_X(2) = \frac{4}{3} \cdot 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P_X(4) = \frac{3}{4} \cdot P_X(3) = \frac{3}{4} \cdot 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P_X(5) = \frac{2}{5} \cdot P_X(4) = \frac{2}{5} \cdot 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P_X(6) = \frac{1}{6} P_X(5) = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

(d)

Für $k = 1, \dots, n$ gilt:

$$b_{n,p}(k) = b_{n,1-p}(n-k) \quad (*)$$

Beweis von (*):

$$\begin{aligned} b_{n,1-p}(n-k) &= \binom{n}{n-k} \cdot (1-p)^{n-k} \cdot (1-(1-p))^{n-(n-k)} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p^k \\ &= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\ &= b_{n,p}(k) \end{aligned}$$

Für $n = 6$ und $p = \frac{3}{4}$ folgt aus (*):

$$b_{6,\frac{3}{4}}(k) = b_{6,\frac{1}{4}}(6-k)$$

und unter Verwendung der Ergebnisse aus Teil (b):

$$\begin{aligned} \Rightarrow b_{6,\frac{3}{4}}(0) &= b_{6,\frac{1}{4}}(6) \approx 2.4414 \cdot 10^{-4} \\ b_{6,\frac{3}{4}}(1) &= b_{6,\frac{1}{4}}(5) \approx 4.3945 \cdot 10^{-3} \\ b_{6,\frac{3}{4}}(2) &= b_{6,\frac{1}{4}}(4) \approx 0.0330 \\ b_{6,\frac{3}{4}}(3) &= b_{6,\frac{1}{4}}(3) \approx 0.1318 \\ b_{6,\frac{3}{4}}(4) &= b_{6,\frac{1}{4}}(2) \approx 0.2966 \\ b_{6,\frac{3}{4}}(5) &= b_{6,\frac{1}{4}}(1) \approx 0.3560 \\ b_{6,\frac{3}{4}}(6) &= b_{6,\frac{1}{4}}(0) \approx 0.1780 \end{aligned}$$

Histogramm:

siehe hierzu das Histogramm aus Teil (b), allerdings gelesen von rechts nach links.

Aufgabe 2

$$n = 10; \quad p = \frac{1}{2}; \quad 3 \leq k \leq 6$$

(a)

Zufallsvariable X = Anzahl der Köpfe K .

$$P_X(k) = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$\binom{10}{3} = 120; \quad \binom{10}{4} = 210; \quad \binom{10}{5} = 252; \quad \binom{10}{6} = 210$$

(b)

$$\begin{aligned}P(3 \leq X \leq 6) &= \sum_{k=3}^6 \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\&= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \sum_{k=3}^6 \binom{10}{k} \\&= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot (120 + 210 + 252 + 210) \\&= 792 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.7734\end{aligned}$$

(c)

Es gilt:

$$\begin{aligned}\mu &= n \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \\ \sigma^2 &= n \cdot p \cdot (1 - p) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} \\ \Rightarrow \sigma &= \frac{1}{2}\sqrt{10} \approx 1.58114\end{aligned}$$

Dichtefunktion φ der allgemeinen Normalverteilung ($N(\mu, \sigma^2)$ -Verteilung; Gaußverteilung)

Allgemein:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Mit $\mu = 5$ und $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{10}$ ergibt sich:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{5\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot (x-5)^2} \approx 0.2523 \cdot e^{-0.2 \cdot (x-5)^2}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(x)$	0.002	0.010	0.042	0.113	0.207	0.252	0.207	0.113	0.042	0.010	0.002

Es gilt: Wegen $p = \frac{1}{2}$ ist die Approximation durch die Normalverteilung gut.

$$\begin{aligned}
 P(a \leq X \leq b) &\approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) \\
 \Rightarrow P(3 \leq X \leq 6) &\approx \Phi\left(\frac{6 + \frac{1}{2} - 5}{\frac{1}{2}\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{3 - \frac{1}{2} - 5}{\frac{1}{2}\sqrt{10}}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{-\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{10}}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) - \Phi\left(\frac{-5}{\sqrt{10}}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right)\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right) - 1 \\
 &\approx \Phi(0.95) + \Phi(1.58) - 1 \\
 &\approx 0.8289 + 0.9429 - 1 \\
 &= 0.7718
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Poisson-Verteilung zum Parameter $\lambda > 0$:

$$P_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Behauptung: Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$P_X(k+1) = \frac{\lambda}{k+1} \cdot P_X(k)$$

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

$$\begin{aligned} P_X(k+1) &= \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} \cdot e^{-\lambda} \\ &= \frac{\lambda \cdot \lambda^k}{(k+1) \cdot k!} \cdot e^{-\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{k+1} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{k+1} \cdot P_X(k) \end{aligned}$$

□

(a)

Histogramm mit der Intervallbreite 1 für $\lambda = 1$:

$$P_X(k) = \frac{1}{k!} \cdot e^{-1}$$

k	0	1	2	3	4	5	6	...
$P_X(k)$	e^{-1}	e^{-1}	$\frac{1}{2}e^{-1}$	$\frac{1}{6}e^{-1}$	$\frac{1}{24}e^{-1}$	$\frac{1}{120}e^{-1}$	$\frac{1}{720}e^{-1}$	...
$\approx$	0.37	0.37	0.18	0.06	0.015	0.003	0.001	...

(b)

Histogramm mit der Intervallbreite 1 für $\lambda = 3$:

$$P_X(k) = \frac{3^k}{k!} e^{-3} \quad \text{bzw.} \quad P_X(k+1) = \frac{3}{k+1} P_X(k)$$

k	0	1	2	3	4	5
$P_X(k)$	e^{-3}	$3e^{-3}$	$\frac{9}{2}e^{-3}$	$\frac{9}{2}e^{-3}$	$\frac{27}{8}e^{-3}$	$\frac{81}{40}e^{-3}$
$\approx$	0.050	0.149	0.224	0.224	0.168	0.101

k	6	7	8	9	10
$P_X(k)$	$\frac{81}{80}e^{-3}$	$\frac{243}{560}e^{-3}$	$\frac{729}{4480}e^{-3}$	$\frac{243}{4480}e^{-3}$	$\frac{729}{44800}e^{-3}$
$\approx$	0.050	0.022	0.008	0.003	0.001

(c)

Histogramm mit der Intervallbreite 1 für $\lambda = 4$:

$$P_X(k) = \frac{4^k}{k!} \cdot e^{-4} \quad \text{bzw.} \quad P_X(k+1) = \frac{4}{k+1} P_X(k)$$

k	0	1	2	3	4	5	6
$P_X(k)$	e^{-4}	$4e^{-4}$	$8e^{-4}$	$\frac{32}{3}e^{-4}$	$\frac{32}{3}e^{-4}$	$\frac{128}{15}e^{-4}$	$\frac{256}{45}e^{-4}$
$\approx$	0.018	0.073	0.147	0.195	0.195	0.156	0.104

k	7	8	9	10	11	12
$P_X(k)$	$\frac{1024}{315}e^{-4}$	$\frac{512}{315}e^{-4}$	$\frac{2048}{2835}e^{-4}$	$\frac{4096}{14175}e^{-4}$	$\frac{16384}{155925}e^{-4}$	$\frac{16384}{467775}e^{-4}$
$\approx$	0.060	0.030	0.013	0.005	0.002	0.001

Aufgabe 4

(a)

Ereignis A : Mehr als ein Fehler in einer 10-Bit Nachricht

Ereignis $\bar{A}$: Höchstens ein Fehler in der 10-Bit Nachricht

Zufallsvariable X = Anzahl der Fehler in der 10-Bit Nachricht

X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0.01$.

$$\begin{aligned}P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\P(A) &= 1 - b_{10,0.01}(0) - b_{10,0.01}(1) \\P(A) &= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0.01^1 \cdot 0.99^9 \\P(A) &= 1 - 0.99^{10} - 0.1 \cdot 0.99^9 \\P(A) &= 1 - 0.99^9 \cdot (0.99 + 0.1) \\P(A) &= 1 - 1.09 \cdot 0.99^9 \approx 0.0043\end{aligned}$$

(b)

Poisson-Approximation:

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$p(k)$ approximiert die Binomialverteilung $b_{n,p}(k)$ für $\lambda = n \cdot p$.

Eine Poisson-verteilte Zufallsvariable hat den Erwartungswert λ .

Für $n = 10$ und $p = 0.01$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\lambda &= n \cdot p = 10 \cdot 0.01 = 0.1 \\ \Rightarrow p(k) &= \frac{0.1^k}{k!} \cdot e^{-0.1}\end{aligned}$$

Für die Wahrscheinlichkeit des in Teil (a) definierten Ereignisses A ergibt sich also näherungsweise:

$$\begin{aligned}P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\ &\approx 1 - p(0) - p(1) \\ &= 1 - e^{-0.1} - 0.1 \cdot e^{-0.1} \\ &= 1 - 1.1 \cdot e^{-0.1} \approx 0.0047\end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a)

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 \Rightarrow |\Omega| = 6^2 = 36$$

X_1 := Augenzahl des 1. Würfels

X_2 := Augenzahl des 2. Würfels

i sei die Augensumme beider Würfel.

Die W-Verteilung $i \mapsto P_{X_1+X_2}(i)$ der Zufallsvariable $X_1 + X_2$ für

$i \in \mathbb{Z} \wedge 2 \leq i \leq 12$ ist in folgender Zuordnungstabelle wiedergegeben:

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_{X_1+X_2}(i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Für $i \leq 1 \vee i \geq 13$ wird festgesetzt: $P_{X_1+X_2}(i) = 0$.

(b)

Zu verifizieren:

$$P_{X_1+X_2} = P_{X_1} * P_{X_2}$$

wobei „*“ die (diskrete) Faltung bezeichnet.

Sei $f := P_{X_1}$, sei $g := P_{X_2}$ und sei $h := P_{X_1+X_2}$.

Dann ist

$$h = f * g$$

Beweis:

Für $i, j \in \mathbb{Z}$ wird definiert:

$$f_i := P_{X_1}(i) := \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{falls } i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g_j := P_{X_2}(j) := \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{falls } j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechne für jedes $i \in \mathbb{Z}$

$$h_i := (f * g)_i := \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{i-j} \cdot g_j$$

und zeige, dass für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$h_i = P_{X_1+X_2}(i)$$

wobei für $P_{X_1+X_2}(i)$ für $i \in \mathbb{Z}$ die Festsetzungen aus Aufgabe 5 (a) gelten.

1. Fall: $i \leq 1$:

a) $i - j \geq 1$:

$$i - j \geq 1 \Leftrightarrow j \leq i - 1$$

Mit $i \leq 1$ folgt hieraus:

$$j \leq 0 \Rightarrow g_j = 0$$

b) $i - j < 1 \Rightarrow f_{i-j} = 0$

Aus 1 a) und 1 b) folgt für alle $i \in \mathbb{Z} \wedge i \leq 1$:

$$h_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{i-j} \cdot g_j = 0$$

Wegen $P_{X_1+X_2}(i) = 0$ für $i \leq 1$ gilt also:

$$h_i = P_{X_1+X_2}(i) \quad \text{für alle } i \leq 1$$

2. Fall: $i \geq 13$:

a) $i - j \geq 6$:

$$i - j \geq 6 \Leftrightarrow j \geq i - 6$$

Mit $i \geq 13$ folgt hieraus:

$$j \geq 7 \Rightarrow g_j = 0$$

b) $i - j > 6 \Rightarrow f_{i-j} = 0$

Aus 2 a) und 2 b) folgt für alle $i \in \mathbb{Z} \wedge i \geq 13$:

$$h_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{i-j} \cdot g_j = 0$$

Wegen $P_{X_1+X_2}(i) = 0$ für $i \geq 13$ gilt also:

$$h_i = P_{X_1+X_2}(i) \quad \text{für alle } i \geq 13$$

3. Fall: $2 \leq i \leq 12$:

Bemerkung: Bei der Berechnung von $h_2, \dots, h_{12}$ werden Summanden mit

dem Wert 0 nicht notiert.

$$\begin{aligned}
h_2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{2-j} g_j = \sum_{j=1}^1 f_{2-j} g_j = f_1 g_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \\
h_3 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{3-j} g_j = \sum_{j=1}^2 f_{3-j} g_j = f_2 g_1 + f_1 g_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} \\
h_4 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{4-j} g_j = \sum_{j=1}^3 f_{4-j} g_j = f_3 g_1 + f_2 g_2 + f_1 g_3 = \dots = \frac{3}{36} \\
h_5 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{5-j} g_j = \sum_{j=1}^4 f_{5-j} g_j = \dots = \frac{4}{36} \\
h_6 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{6-j} g_j = \sum_{j=1}^5 f_{6-j} g_j = \dots = \frac{5}{36} \\
h_7 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{7-j} g_j = \sum_{j=1}^6 f_{7-j} g_j = \dots = \frac{6}{36} \\
h_8 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{8-j} g_j = \sum_{j=2}^6 f_{8-j} g_j = f_6 g_2 + f_5 g_3 + f_4 g_4 + f_3 g_5 + f_2 g_6 = \dots = \frac{5}{36} \\
h_9 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{9-j} g_j = \sum_{j=3}^6 f_{9-j} g_j = \dots = \frac{4}{36} \\
h_{10} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{10-j} g_j = \sum_{j=4}^6 f_{10-j} g_j = \dots = \frac{3}{36} \\
h_{11} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{11-j} g_j = \sum_{j=5}^6 f_{11-j} g_j = f_6 g_5 + f_5 g_6 = \dots = \frac{2}{36} \\
h_{12} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_{12-j} g_j = \sum_{j=6}^6 f_{12-j} g_j = f_6 g_6 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}
\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$h_i = P_{X_1+X_2}(i) \quad \text{für } 2 \leq i \leq 12$$

und insgesamt:

$$h_i = P_{X_1+X_2}(i) \quad \text{für alle } i \in \mathbb{Z}$$