

Mathematik für Informatiker II - Übungsblatt 10
Übungsgruppe D5, Do 11-13
Vogel

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)

Aufgabe 1

(a)

Jeder der $m \leq 500$ Tage ist als Tag, an dem jeder beliebige der $n < 500$ Chips ausfallen kann, gleich wahrscheinlich.

Ergebnismenge $\Omega = \{1, \dots, 500\}^n \Rightarrow$ es gibt $|\Omega| = 500^n$ mögliche Fälle.

Ereignis E : Mindestens 2 Chips fallen am gleichen Tag aus

Ereignis $\bar{E}$: Keine 2 Chips fallen am gleichen Tag aus.

Für das Eintreten von $\bar{E}$ günstige Fälle sind:

$$|\bar{E}| = 500 \cdot 499 \cdot 498 \cdot \dots \cdot (500 - (n - 1))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(E) &= 1 - P(\bar{E}) \\ &= 1 - \frac{|\bar{E}|}{|\Omega|} \\ &= 1 - \frac{500 \cdot 499 \cdot 498 \cdot \dots \cdot (500 - (n - 1))}{500^n} \\ P(E) &= 1 - \frac{\prod_{i=1}^n (500 - i + 1)}{500^n} \end{aligned}$$

(b)

Definiere folgende Ereignisse:

$T_i E$: Das Elektronengehirn (E) befindet sich hinter der Tür T_i .

$$P(T_i E) = \frac{1}{3}, \quad i = 1, 2, 3$$

- (1) Wegen der Gleichwahrscheinlichkeit kann man o.B.d.A. annehmen, dass Ion Tichy sich für Tür T_1 entscheidet. Seine Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt dabei $\frac{1}{3}$.
- (2) Weiter wird stillschweigend angenommen, dass der Showmaster dann jede der Türen T_2 und T_3 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ öffnet, wenn E sich hinter T_1 befindet.
- (3) Befindet sich E nicht hinter T_1 , so öffnet der Showmaster eine der anderen Türen und zwar jeweils die, hinter der eine Niete zum Vorschein kommt (Ereignisse $T_2 N$, $T_3 N$).

Aus (1), (2) und (3) ergibt sich der folgende Baum:

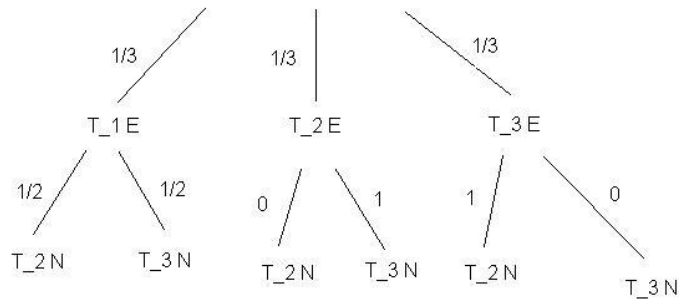


Abbildung 1: Baumdiagramm zu Aufgabe 1 (b)

Berechne: $P(T_1 E | T_j N)$, $j = 2, 3$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 P(T_1 E | T_j N) &= \frac{P(T_1 E \cap T_j N)}{P(T_j N)} \\
 &= \frac{P(T_1 E) \cdot P(T_j N | T_1 E)}{\sum_{i=1}^3 P(T_i E) \cdot P(T_j N | T_i E)} \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1} \\
 &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

- Bleibt also Ion Tichy bei seiner ursprünglichen Wahl, so liegt seine Gewinnwahrscheinlichkeit unverändert bei $\frac{1}{3}$.
- Nun wird der Fall betrachtet, dass sich Ion Tichy umentscheidet, d.h. er wählt T_2 , wenn zuvor T_3 geöffnet wurde und somit $T_3 N$ eingetreten ist, oder er wählt T_3 , wenn $T_2 N$ eingetreten ist.

Berechne:

$$\begin{aligned}
 P(T_3E|T_2N) &= \frac{P(T_3E \cap T_2N)}{P(T_2N)} \\
 &= \frac{P(T_3E) \cdot P(T_2N|T_3E)}{\sum_{i=1}^3 P(T_iE) \cdot P(T_2N|T_iE)} \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1} \\
 &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$P(T_3E|T_2N) = \frac{2}{3}$$

Analog berechnet man:

$$\begin{aligned}
 P(T_2E|T_3N) &= \frac{P(T_2E \cap T_3N)}{P(T_3N)} \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Wenn Ion Tichy sich umentscheidet, verdoppelt er seine Gewinnwahrscheinlichkeit von ursprünglich $\frac{1}{3}$ auf nun $\frac{2}{3}$. Ion Tichy sollte sich also umentscheiden, um seine Gewinnwahrscheinlichkeit zu maximieren.

Aufgabe 2

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}^8$$

$$X = 1, 2, 3, \dots = \text{Anzahl der Versuche}$$

Wahrscheinlichkeits-Verteilung:

Für $k = 1, 2, \dots$ gilt:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p \quad \text{mit } p = \frac{1}{10^8}$$

Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^{k-1} \cdot p \\
 &= p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^{k-1} \quad (I)
 \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ konvergiert für alle $|x| < 1$ und darf als Potenzreihe gliedweise differenziert werden.

Aus

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)' = \left(\frac{1}{1-x} \right)'$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (II)$$

Setzt man in (II) $x := 1 - p$ ein, so folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} = \frac{1}{p^2} \quad (III)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(X) &\stackrel{(I)}{=} p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &\stackrel{(III)}{=} p \cdot \frac{1}{p^2} \\ E(X) &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Für $p = \frac{1}{10^8}$ folgt:

$$E(X) = 10^8$$

Aufgabe 3

Die Zufallsvariable X_k gibt die Ziffer (entweder 0 oder 1) an, die an der k -ten Stelle steht.

Es soll gelten:

$$P_{X_k}(0) = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad P_{X_k}(1) = \frac{1}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Weiterhin sei S_n die Anzahl der Einsen in einer Folge der Länge n .

Gesucht: Eine Abschätzung für $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0.1\right)$ nach unten für

(a) $n = 100$

(b) $n \rightarrow \infty$

Ziel ist es, die folgende Version der Tschebyschew-Ungleichung (TU) anzuwenden:

$$(TU) : P(|X - \mu| < \varepsilon) > 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

wobei $X := \frac{S_n}{n}$, $\mu := E\left(\frac{S_n}{n}\right)$, $\sigma^2 := V\left(\frac{S_n}{n}\right)$.

Die Bestimmung von μ und σ^2 wird im folgenden dargelegt:

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$X_k := \begin{cases} 1 & , \text{ falls an der } k\text{-ten Stelle 1 steht} \\ 0 & , \text{ falls an der } k\text{-ten Stelle 0 steht} \end{cases}$$

- Betrachte allgemein folgende Wahrscheinlichkeits-Verteilung der Zufallsvariablen X_k :

$$\frac{x}{P_{X_k}(x)} \left| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline q & p \end{array} \right. \text{ mit } q = 1 - p.$$

- Erwartungswert μ von X_k :

$$\begin{aligned} E(X_k) &= 0 \cdot q + 1 \cdot p \\ E(X_k) &= p \end{aligned} \quad (1)$$

- Varianz $V(X_k)$:
Offensichtlich gilt

$$X_k^2 = X_k$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(X_k^2) &= E(X_k) = p \\ V(X_k) &= E(X_k^2) - (E(X_k))^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p \cdot (1 - p) \\ &= p \cdot q \end{aligned} \quad (2)$$

- S_n sei die Gesamtzahl der Einsen in einer Folge der Länge n

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow S_n &= X_1 + \dots + X_n \\
 &= \sum_{k=1}^n X_k \\
 \Rightarrow E(S_n) &= E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n E(X_k) \\
 &\stackrel{(1)}{=} \sum_{k=1}^n p \\
 &= n \cdot p \qquad (3)
 \end{aligned}$$

- Da die Zufallsvariablen X_k ($k = 1, \dots, n$) nur vom Wert der k -ten Stelle abhängen, sind sie unabhängig.

Aus der Unabhängigkeit von $X_1, \dots, X_n$ ergibt sich für die Varianz $V(S_n)$:

$$\begin{aligned}
 V(S_n) &= V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n V(X_k) \\
 &\stackrel{(2)}{=} \sum_{k=1}^n (p \cdot q) \\
 &= n \cdot p \cdot q \qquad (4)
 \end{aligned}$$

- Berechne nun $\mu = E\left(\frac{S_n}{n}\right)$ und $\sigma^2 = V\left(\frac{S_n}{n}\right)$:

$$\begin{aligned}
 \mu &= E\left(\frac{S_n}{n}\right) \\
 &= E\left(\frac{1}{n} \cdot S_n\right) \\
 &= \frac{1}{n} \cdot E(S_n) \\
 &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{n} \cdot n \cdot p \\
 &= p \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= V\left(\frac{S_n}{n}\right) \\
 &= V\left(\frac{1}{n} \cdot S_n\right) \\
 &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot V(S_n) \\
 &\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot p \cdot q \\
 &= \frac{p \cdot q}{n} \quad (6)
 \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 3 (a):

Nach Aufgabenstellung ist

$$P_{X_k}(0) = P_{X_k}(1) = \frac{1}{2} =: p \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

und $n = 100$.

Aus (5) folgt für $p = \frac{1}{2}$:

$$\mu = \frac{1}{2} \quad (5')$$

Aus (6) folgt für $p = \frac{1}{2}$ und $n = 100$:

$$\sigma^2 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{100} = 0.0025 \quad (6')$$

Mit $X := \frac{S_n}{n}$ und $\varepsilon = 0.1$ ergibt sich unter Verwendung von (5') und (6') aus der Tschebyschew-Ungleichung (TU):

$$\begin{aligned}
 P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0.1\right) &> 1 - \frac{0.0025}{0.01} \\
 P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0.1\right) &> 0.75
 \end{aligned}$$

Dies ist für $n = 100$ die verlangte Abschätzung von $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0.1\right)$ nach unten.

Lösung von Aufgabe 3 (b):

Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ folgt wegen (5) und (6) aus der Tschebyschew-Ungleichung

$$(TU) : P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{p \cdot q}{n \cdot \varepsilon^2} \quad (*)$$

Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{p \cdot q}{n \cdot \varepsilon^2}\right) = 1 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) &\leq 1 \quad \forall n \geq 1 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) &\leq 1 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) &= 1 \end{aligned}$$

Bemerkung:

Dieses Ergebnis gilt natürlich insbesondere für $p = \frac{1}{2}$ und $\varepsilon = 0.1$.

Abschlusskommentar:

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die mittlere Anzahl der Einsen $\frac{S_n}{n}$ (allgemein: die relative Häufigkeit $\frac{S_n}{n}$) von der zugehörigen Wahrscheinlichkeit p (hier $p = \frac{1}{2}$) um weniger als ε unterscheidet, strebt für $n \rightarrow \infty$ gegen 1. (Dabei kann $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine Zahl sein.)

Aufgabe 4

(a)

Die einfache Markow-Ungleichung lautet:

$$P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t} \quad (t > 0)$$

Zufallsgröße X = Anzahl der Pixel, die kaputt sind.

Nach Aufgabenstellung: $X > 6 \Rightarrow X \geq 7$ also $t = 7$; Ausfallwahrscheinlichkeit $p = 10^{-6}$ für jedes Pixel i .

Gesamtanzahl n der Pixel:

$$\begin{aligned} n &= 1024 \cdot 1280 \\ &= 1310720 \end{aligned}$$

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt.

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(X) &= n \cdot p = 1310720 \cdot 10^{-6} \\ &= 1.31072 \\ \Rightarrow P(X \geq 7) &\leq \frac{E(X)}{7} \\ &= \frac{1.31072}{7} \\ &\leq 0.18725 \end{aligned}$$

Ergebnis:

Die einfache Markow-Ungleichung liefert als obere Schranke für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ≈ 0.18725

(b)

Gesamtanzahl n der Pixel:

$$\begin{aligned} n &= 1024 \cdot 1280 = 1310720 \\ n &= 2^{10} \cdot 2^8 \cdot 5 = 5 \cdot 2^{18} \end{aligned}$$

Definiere die Zufallsgröße

$$Y_i := \begin{cases} 1 & \text{falls das Pixel } i \text{ kaputt ist} \\ 0 & \text{falls das Pixel } i \text{ intakt ist} \end{cases}$$

Die Zufallsgröße $X_n := Y_1 + \dots + Y_n$ erfasst die Anzahl der kaputten Pixel unter allen n Pixeln.

$Y_1, \dots, Y_n$ sind unabhängige Zufallsvariablen. Für jedes Pixel i beträgt die Ausfallwahrscheinlichkeit

$$p = P(Y_i = 1) = 10^{-6} \Rightarrow q = P(Y_i = 0) = 1 - 10^{-6}$$

Berechne die Momenten erzeugende Funktion $M_{Y_i}(\Theta)$ von Y_i , $\Theta \geq 0$.

$$\begin{aligned} M_{Y_i}(\Theta) &:= E(e^{\Theta Y_i}) = e^{\Theta \cdot 0} \cdot P(Y_i = 0) + e^{\Theta \cdot 1} \cdot P(Y_i = 1) \\ &= 1 - 10^{-6} + 10^{-6} \cdot e^{\Theta} \\ &= 1 + 10^{-6} \cdot (e^{\Theta} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{X_n}(\Theta) &= M_{Y_1 + \dots + Y_n}(\Theta) \\ &= M_{Y_1}(\Theta) \cdot \dots \cdot M_{Y_n}(\Theta) \\ &= [1 + 10^{-6} \cdot (e^{\Theta} - 1)]^n \end{aligned}$$

Chernoff-Schranke:

$$P(X \geq t) \leq \inf_{\Theta \geq 0} e^{-\Theta \cdot t} M_{X_n}(\Theta)$$

gesucht ist eine obere Schranke für

$$P(X_n > 6) = P(X_n \geq 7)$$

Für $t = 7$ und $n = 5 \cdot 2^{18} = 1310720$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(X_n \geq 7) &\leq \inf_{\Theta \geq 0} [e^{-7 \cdot \Theta} (1 + 10^{-6} \cdot (e^{\Theta} - 1))^n] \\ P(X_{5 \cdot 2^{18}} \geq 7) &\leq \inf_{\Theta \geq 0} [10^{-6n} \cdot e^{-7\Theta} \cdot (10^6 + (e^{\Theta} - 1))^n] \\ P(X_{5 \cdot 2^{18}} \geq 7) &\leq \inf_{\Theta \geq 0} [10^{-7864320} \cdot e^{-7\Theta} \cdot (10^6 + (e^{\Theta} - 1))^{1310720}] \end{aligned}$$

Betrachte:

$$\begin{aligned} f(\Theta) &= 10^{-7864320} \cdot e^{-7\Theta} \cdot (999999 + e^{\Theta})^{1310720} \\ \Rightarrow f'(\Theta) &= 10^{-7864320} \cdot [-7 \cdot e^{-7\Theta} \cdot (999999 + e^{\Theta})^{1310720} \\ &\quad + e^{-7\Theta} \cdot 1310720 \cdot (999999 + e^{\Theta})^{1310719} \cdot e^{\Theta}] \\ &= 10^{-7864320} \cdot e^{-7\Theta} \cdot (999999 + e^{\Theta})^{1310719} \\ &\quad \cdot [-7 \cdot (999999 + e^{\Theta}) + 1310720 \cdot e^{\Theta}] \\ &= 10^{-7864320} \cdot e^{-7\Theta} \cdot (999999 + e^{\Theta})^{1310719} \cdot (1310713 \cdot e^{\Theta} - 6999993) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(\Theta) = 0 \Rightarrow 1310713 \cdot e^{\Theta} - 6999993 &= 0 \\ e^{\Theta} &= \frac{6999993}{1310713} \\ \Theta_0 &= \ln \frac{6999993}{1310713} \approx \ln(5.340599) \approx 1.675338 \end{aligned}$$

f hat an der Stelle Θ_0 einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$.

$$\Rightarrow f(\Theta) \text{ wird minimiert für } \Theta_0 = \ln \frac{6999993}{1310713}.$$

Daraus folgt:

$$f(\Theta_0) = 10^{-7864320} \cdot \left(\frac{6999993}{1310713} \right)^{-7} \cdot \left(999999 + \frac{6999993}{1310713} \right)^{1310720}$$

Zur Berechnung von $f(\Theta_0)$ wird $\ln f(\Theta_0)$ gebildet:

$$\begin{aligned} \ln f(\Theta_0) &= -7864320 \cdot \ln(10) + (-7) \cdot \ln \frac{6999993}{1310713} \\ &\quad + 1310720 \cdot \ln \left(999999 + \frac{6999993}{1310713} \right) \\ \ln f(\Theta_0) &\approx -6.039 \\ \Rightarrow f(\Theta_0) &\approx e^{-6.039} \\ &\approx 2.38394 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P(X_{5 \cdot 2^{18}} \geq 7) \leq 2.384 \cdot 10^{-3}$$

Aufgabe 5

Zuverlässigkeiten:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{6}{10} = 0.6 \\ p_2 &= \frac{7}{10} = 0.7 \\ p_3 &= \frac{8}{10} = 0.8 \\ p_4 &= \frac{9}{10} = 0.9 \end{aligned}$$

(a)

Zuverlässigkeit der Schaltung:

Der k -ten Komponente des Systems (der Schaltung) wird der Indikator I_k zugeordnet, welcher den Zustand der k -ten Komponente anzeigt:

$$I_k := \begin{cases} 1 & \text{wenn die } k\text{-te Komponente arbeitet} \\ 0 & \text{wenn die } k\text{-te Komponente nicht arbeitet} \end{cases}$$

Die Indikatoren der einzelnen Komponenten sind unabhängige Zufallsvariablen. Die k -te Komponente hat die Zuverlässigkeit

$$E(I_k) = p_k, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

Für den Zustand I_{12} des aus der ersten und zweiten Komponente bestehenden Parallelsystems gilt:

$$I_{12} = 1 - (1 - I_1) \cdot (1 - I_2) = I_1 + I_2 - I_1 I_2$$

Für seine Zuverlässigkeit $E(I_{12})$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} E(I_{12}) &= E(I_1 + I_2 - I_1 I_2) \\ &= E(I_1) + E(I_2) - E(I_1) \cdot E(I_2) \\ E(I_{12}) &= p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Für den Zustand I_{123} des aus den Komponenten 1, 2 und 3 bestehenden Teilsystems gilt:

$$I_{123} = I_{12} \cdot I_3$$

Für seine Zuverlässigkeit $E(I_{123})$ folgt:

$$\begin{aligned} E(I_{123}) &= E(I_{12} \cdot I_3) \\ &= E(I_{12}) \cdot E(I_3) \\ E(I_{123}) &\stackrel{(1)}{=} (p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2) \cdot p_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Für den Zustand I des gesamten Systems ergibt sich:

$$\begin{aligned} I &= 1 - (1 - I_{123}) \cdot (1 - I_4) \\ &= I_4 + I_{123} - I_{123} \cdot I_4 \end{aligned}$$

Für die Zuverlässigkeit $p = E(I)$ des Systems folgt schließlich:

$$\begin{aligned} E(I) &= E(I_4 + I_{123} - I_{123} \cdot I_4) \\ &= E(I_4) + E(I_{123}) - E(I_{123}) \cdot E(I_4) \\ &= p_4 + (p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2) \cdot p_3 - (p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2) \cdot p_3 \cdot p_4 \\ E(I) &= p_4 + (p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2) \cdot p_3 \cdot (1 - p_4) \\ p &= p_4 + (p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2) \cdot p_3 \cdot (1 - p_4) \end{aligned} \quad (3)$$

Aus (3) folgt:

$$\begin{aligned} p &= 0.9 + (0.6 + 0.7 - 0.6 \cdot 0.7) \cdot 0.8 \cdot 0.1 \\ &= 0.9 + 0.88 \cdot 0.08 \\ p &= 0.9704 \end{aligned}$$

(b)

Gegeben: Parallelschaltung von n identischen Relais;

Zuverlässigkeit $p_i = \frac{1}{n}$ ($i = 1, \dots, n$).

Lösung: Der Zustand des i -ten Relais wird durch den Indikator

$$I_i := \begin{cases} 1 & \text{wenn das } i\text{-te Relais funktioniert} \\ 0 & \text{wenn das } i\text{-te Relais nicht funktioniert} \end{cases}$$

beschrieben.

Das i -te Relais hat die Zuverlässigkeit $E(I_i) = p_i = \frac{1}{n}$ ($i = 1, \dots, n$).

Für den Zustand I der Parallelschaltung ergibt sich dann:

$$I = 1 - (1 - I_1) \cdot \dots \cdot (1 - I_n)$$

Hieraus folgt für die Zuverlässigkeit $p(n)$ der ganzen Schaltung:

$$\begin{aligned}
 p(n) = E(I) &= 1 - E(1 - I_1) \cdot \dots \cdot E(1 - I_n) \\
 &= 1 - (1 - E(I_1)) \cdot \dots \cdot (1 - E(I_n)) \\
 &= 1 - (1 - p_1) \cdot \dots \cdot (1 - p_n) \\
 &= 1 - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{n\text{-mal}} \\
 \Rightarrow p(n) &= 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n
 \end{aligned}$$

Spocks Behauptung, dass die Zuverlässigkeit der ganzen Schaltung gegen 1 strebt, wenn n gegen $+\infty$ geht, obwohl die Zuverlässigkeit der einzelnen Relais gegen Null tendiert, ist falsch, denn:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} p(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right] \\
 &= 1 - e^{-1} \\
 &= 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632 \neq 1
 \end{aligned}$$