

Mathematik für Informatiker II - Übungsblatt 1
Übungsgruppe D3, Do 11-13
Paulus

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)

Aufgabe 1

(a)

$$\begin{aligned}
 u + v &= (u_1, \dots, u_n)^T + (v_1, \dots, v_n)^T \\
 &\stackrel{Def.}{=} (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)^T \\
 &\stackrel{K^+}{=} (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n)^T \\
 &\stackrel{Def.}{=} (v_1, \dots, v_n)^T + (u_1, \dots, u_n)^T \\
 &= v + u
 \end{aligned}$$

□

(b)

$$\begin{aligned}
 (u + v) + w &= ((u_1, \dots, u_n)^T + (v_1, \dots, v_n)^T) + (w_1, \dots, w_n)^T \\
 &\stackrel{Def.}{=} ((u_1 + v_1), \dots, (u_n + v_n))^T + (w_1, \dots, w_n)^T \\
 &\stackrel{Def.}{=} ((u_1 + v_1) + w_1, \dots, (u_n + v_n) + w_n)^T \\
 &\stackrel{A^+}{=} (u_1 + (v_1 + w_1), \dots, u_n + (v_n + w_n))^T \\
 &\stackrel{Def.}{=} (u_1, \dots, u_n)^T + ((v_1 + w_1), \dots, (v_n + w_n))^T \\
 &\stackrel{Def.}{=} (u_1, \dots, u_n)^T + ((v_1, \dots, v_n)^T + (w_1, \dots, w_n)^T) \\
 &= u + (v + w)
 \end{aligned}$$

□

(c)

$$\begin{aligned}
 u + 0 &= (u_1, \dots, u_n)^T + (0, \dots, 0)^T \\
 &\stackrel{Def.}{=} (u_1 + 0, \dots, u_n + 0)^T \\
 &\stackrel{K^+}{=} (0 + u_1, \dots, 0 + u_n)^T \\
 &\stackrel{Def.}{=} (0, \dots, 0)^T + (u_1, \dots, u_n)^T \\
 &= 0 + u \\
 \\
 u + 0 &= (0 + u_1, \dots, 0 + u_n)^T \\
 &\stackrel{(*)}{=} (u_1, \dots, u_n)^T \\
 &= u
 \end{aligned}$$

(*) 0 ist das neutrale Element der Addition.

□

(d)

$$\begin{aligned} u + (-u) &= (u_1, \dots, u_n)^T + (-u_1, \dots, -u_n)^T \\ &\stackrel{Def.}{=} (u_1 + (-u_1), \dots, u_n + (-u_n))^T \\ &= (0, \dots, 0)^T \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

(e)

$$\begin{aligned} \alpha(\beta u) &= \alpha(\beta u_1, \dots, \beta u_n)^T \\ &\stackrel{Def.}{=} (\alpha(\beta u_1), \dots, \alpha(\beta u_n))^T \\ &\stackrel{A^*}{=} ((\alpha\beta)u_1, \dots, (\alpha\beta)u_n)^T \\ &\stackrel{Def.}{=} (\alpha\beta)(u_1, \dots, u_n)^T \\ &= (\alpha\beta)u \end{aligned}$$

□

(f)

$$\begin{aligned} \alpha(u + v) &= \alpha((u_1, \dots, u_n)^T + (v_1, \dots, v_n)^T) \\ &\stackrel{Def.}{=} \alpha((u_1 + v_1), \dots, (u_n + v_n))^T \\ &\stackrel{Def.}{=} (\alpha(u_1 + v_1), \dots, \alpha(u_n + v_n))^T \\ &\stackrel{D}{=} ((\alpha u_1 + \alpha v_1), \dots, (\alpha u_n + \alpha v_n))^T \\ &\stackrel{Def.}{=} (\alpha u_1, \dots, \alpha u_n)^T + (\alpha v_1, \dots, \alpha v_n)^T \\ &\stackrel{Def.}{=} \alpha(u_1, \dots, u_n)^T + \alpha(v_1, \dots, v_n)^T \\ &= \alpha u + \alpha v \end{aligned}$$

□

(g)

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)v &= (\alpha + \beta)(v_1, \dots, v_n)^T \\ &\stackrel{Def.}{=} ((\alpha + \beta)v_1, \dots, (\alpha + \beta)v_n)^T \\ &\stackrel{D}{=} (\alpha v_1 + \beta v_1, \dots, \alpha v_n + \beta v_n)^T \\ &\stackrel{Def.}{=} (\alpha v_1, \dots, \alpha v_n)^T + (\beta v_1, \dots, \beta v_n)^T \\ &\stackrel{Def.}{=} \alpha(v_1, \dots, v_n)^T + \beta(v_1, \dots, v_n)^T \\ &= \alpha v + \beta v \end{aligned}$$

□

(h)

$$\begin{aligned} 1v &= 1(v_1, \dots, v_n)^T \\ &\stackrel{Def.}{=} (1v_1, \dots, 1v_n)^T \\ &\stackrel{(*)}{=} (v_1, \dots, v_n)^T \\ &= v \end{aligned}$$

(*) 1 ist das neutrale Element der Multiplikation. $\square$

Aufgabe 2

Gegeben: $x = (1, 6)^T \in \mathbb{R}^2$ und $y = (2, 3)^T \in \mathbb{R}^2$.

- $p = 1$:

$$\begin{aligned} \|v\|_1 &:= \sum_{i=1}^2 |v_i| = |v_1| + |v_2| \\ \text{Induzierte Metrik: } d_1(u, v) &= \|u - v\|_1 \\ x - y = (-1, 3)^T \Rightarrow d_1(x, y) &= \|x - y\|_1 \\ &= \|(-1, 3)^T\|_1 = |-1| + |3| = 4 \end{aligned}$$

- $p = 2$:

$$\begin{aligned} \|v\|_2 &:= \left(\sum_{i=1}^2 |v_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\ \text{Induzierte Metrik: } d_2(u, v) &= \|u - v\|_2 \\ \Rightarrow d_2(x, y) &= \|x - y\|_2 \\ &= \|(-1, 3)^T\|_2 \\ &= \sqrt{(-1)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

- $p = \infty$:

$$\begin{aligned} \|v\|_\infty &:= \max\{|v_1|, |v_2|\} \\ \text{Induzierte Metrik: } d_\infty(u, v) &= \|u - v\|_\infty \\ \Rightarrow d_\infty(x, y) &= \|x - y\|_\infty \\ &= \|(-1, 3)^T\|_\infty \\ &= \max\{|-1|, |3|\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Die Metrik $d_1(u, v) = |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|$ heißt auch Cityblock-Metrik, weil in einem gitterförmigen Straßennetz die von einem Fahrzeug zurückgelegte Fahrstrecke zwischen zwei Punkten (u_1, u_2) und (v_1, v_2) genau dieser Metrik entspricht.

Aufgabe 3

Gegeben: $f(x) = e^x - 1$; $g_t(x) = t \cdot x \quad t \in \mathbb{R}$

Gesucht: $t \in \mathbb{R} \mid d(f, g_t)$ minimal

Lösung: Berechne $d^2(f, g_t)$:

$$\begin{aligned}d^2(f, g_t) &= \int_0^1 (e^x - 1 - t \cdot x)^2 dx \\&= \int_0^1 (e^{2x} - 2e^x + 1 - 2txe^x + 2tx + t^2x^2) dx \\&= \int_0^1 (e^{2x} + 1 + 2tx + t^2x^2) dx - 2 \cdot \int_0^1 (1 + tx)e^x dx \\&= \left[\frac{1}{2}e^{2x} + x + tx^2 + \frac{1}{3}t^2x^3 \right]_0^1 - 2 \cdot [(1 - t + tx)e^2]_0^1 \\&= \frac{1}{2}e^2 + 1 + t + \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{2} - 2 \cdot [(1 - t + t)e - (1 - t)] \\&= \frac{1}{3}t^2 + t + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} - 2e + 2 - 2t \\d^2(f, g_t) &= \frac{1}{3}t^2 - t + \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Anmerkung:

$$\begin{aligned}\int (1 + tx)e^2 dx &= (1 + tx)e^x - \int te^x dx \\&= (1 + tx)e^x - te^x \\&= (1 - t + tx)e^x\end{aligned}$$

$$d(f, g_t) \text{ minimal} \Leftrightarrow d^2(f, g_t) \text{ minimal}$$

Bestimme $t \in \mathbb{R} \mid d^2(f, g_t) =: d(t)$ minimal ist:

$$\begin{aligned}d(t) &= \frac{1}{3}t^2 - t + \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{5}{2} \\ \Rightarrow d'(t) &= \frac{2}{3}t - 1 \\ d''(t) &= \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \\ d'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}t - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Ergebnis:

Der Abstand der Funktionen $f(x) = e^x - 1$ und $g_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{3}{2}x$ ist bezüglich der Metrik d minimal.

Der minimale Abstand der Funktionen f und $g_{\frac{3}{2}}$ beträgt:

$$\begin{aligned} d_{min} &= d(f, g_{\frac{3}{2}}) \\ &= \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{5}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}e^2 - 2e + 1,75} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Sei M eine beliebige Menge mit $|M| \geq 2$ und sei

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x = y \\ 1 & , \text{ falls } x \neq y \end{cases}$$

Zeige (M, d) ist ein metrischer Raum. Dazu ist nachzuweisen, dass die Abbildung

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto d(x, y)$$

eine Metrik auf M ist.

Beweis: Seien $x, y \in M$ beliebig.

(i)

$$\left. \begin{aligned} d(x, y) &= 0 & , \text{ falls } x = y \\ d(x, y) &= 1 & , \text{ falls } x \neq y \end{aligned} \right\} \Rightarrow d(x, y) \geq 0$$

(ii)

$$x = y \xrightarrow{Def.} d(x, y) = 0;$$

$$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

denn wäre

$$x \neq y \xrightarrow{Def.} d(x, y) = 1 \quad \text{Widerspruch zur Voraussetzung } d(x, y) = 0.$$

Also:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(iii)

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \begin{cases} 0 & , \text{ falls } x = y \\ 1 & , \text{ falls } x \neq y \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , \text{ falls } y = x \\ 1 & , \text{ falls } y \neq x \end{cases} \\ &= d(y, x) \end{aligned}$$

(iv)

Seien $x, y, z \in M$ beliebig. Zu zeigen: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Fallunterscheidung:

$$(1) \quad x = y = z: \quad 0 \leq 0 + 0 \quad (\text{w})$$

$$(2a) \quad x = y \neq z: \quad 0 \leq 1 + 1 \quad (\text{w})$$

$$(2b) \quad x = z \neq y: \quad 1 \leq 0 + 1 \quad (\text{w})$$

$$(2c) \quad y = z \neq x: \quad 1 \leq 1 + 0 \quad (\text{w})$$

$$(3) \quad x \neq y \neq z: \quad 1 \leq 1 + 1 \quad (\text{w})$$

Insgesamt ist bewiesen: (M, d) ist ein metrischer Raum. □

Aufgabe 5

Gegeben:

$$u(x) := 4 + x$$

$$v(x) := 1 + 3x + x^3$$

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u(x) \cdot v(x) dx$$

Gesucht: Maß des Winkels φ zwischen u und v .

Lösung:

$$\cos \varphi = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

(1)

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \int_0^1 (4 + x) \cdot (1 + 3x + x^3) dx \\ &= \int_0^1 (4 + 12x + 4x^3 + x + 3x^2 + x^4) dx \\ &= \int_0^1 (4 + 13x + 3x^2 + 4x^3 + x^4) dx \\ &= \left[4x + \frac{13}{2}x^2 + x^3 + x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 \\ &= 4 + \frac{13}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{5} \\ &= 12,7 \end{aligned}$$

(2) $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Berechne dazu:

$$\begin{aligned}
 \langle u, u \rangle &= \int_0^1 (u(x))^2 dx \\
 &= \int_0^1 (4+x)^2 dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}(4+x)^3 \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 125 - \frac{1}{3} \cdot 64 \\
 &= \frac{61}{3} \\
 \Rightarrow \|u\| &= \sqrt{\frac{61}{3}} \\
 &= \sqrt{\frac{183}{9}} \\
 &= \frac{1}{3}\sqrt{183}
 \end{aligned}$$

(3) $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Berechne dazu:

$$\begin{aligned}
 \langle v, v \rangle &= \int_0^1 (v(x))^2 dx \\
 &= \int_0^1 (1+3x+x^3)^2 dx \\
 &= \int_0^1 (1+6x+9x^2+2x^3+6x^4+x^6) dx \\
 &= \left[x+3x^2+3x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{6}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7 \right]_0^1 \\
 &= 1+3+3+\frac{1}{2}+\frac{6}{5}+\frac{1}{7} \\
 &= 7+\frac{1}{2}+\frac{6}{5}+\frac{1}{7} \\
 &= \frac{490+35+84+10}{70} \\
 &= \frac{619}{70} \\
 \Rightarrow \|v\| &= \sqrt{\frac{619}{70}} \\
 &= \sqrt{\frac{43330}{70^2}} \\
 &= \frac{1}{70}\sqrt{43330}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \cos\varphi &= \frac{12,7}{\frac{1}{3}\sqrt{183} \cdot \frac{1}{70}\sqrt{43330}} \\
&= \frac{2667}{\sqrt{7929390}} \\
\cos\varphi &\approx 0,9471159 \\
\Rightarrow \varphi &\approx 18,717^\circ \\
\Rightarrow \varphi &\approx 0,32667rad
\end{aligned}$$