

Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz

Betrachte mathematische Ausdrücke der Form:

1. $\forall q \in \mathbb{N}_0 \quad \exists p \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x, y \in \mathbb{N}_0 (p > q \wedge (x, y > 1 \Rightarrow x \cdot y \neq p))$
2. $\forall a, b, c, n \in \mathbb{N}_0 ((a, b, c > 0 \wedge n > 2) \Rightarrow a^n + b^n \neq c^n)$
3. $\forall q \in \mathbb{N}_0 \quad \exists p \in \mathbb{N}_0 \quad \forall x, y \in \mathbb{N}_0 (p > q \wedge (x, y > 1 \Rightarrow (x \cdot y \neq p \wedge x \cdot y \neq p + 2)))$

Es sei $\Sigma = \{\wedge, \vee, \neg, (,), \forall, \exists, x, R_1, \dots, R_k\}$. Das Symbol „ x “ wird verwendet, um Variablen über $\mathbb{N}_0$ zu kodieren.

Wir verwenden im Folgenden auch $x_i := xxx...x = x^i$ für $i > 1$.
 $R_1, \dots, R_k$ stellen Relationen auf $x_1, x_2, x_3, \dots$ dar.

Beispiele:

- Additionsrelation:

$$R_1(x_i, x_j, x_k) = \text{„wahr“} \Leftrightarrow x_i + x_j = x_k$$

- Multiplikationsrelation:

$$R_2(x_i, x_j, x_k) = \text{„wahr“} \Leftrightarrow x_i \cdot x_j = x_k$$

- „ $\leq$ “-Relation:

$$R_3(x_i, x_j) = \text{„wahr“} \Leftrightarrow x_i \leq x_j$$

Definition: Ein Satz ist ein Ausdruck $w \in \Sigma^*$ der Form:

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 Q_3 x_3 \dots Q_l x_l \Phi$$

wobei $Q_1, \dots, Q_l \in \{\forall, \exists\}$ und die „Formel“ Φ wie folgt definiert ist:
 Rekursive Definition von „Formel“: Φ ist eine Formel, falls

1. $\Phi = R_j(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$ für $1 \leq j \leq k, 1 \leq i_n \leq l$

- 2.

$\Phi = \Phi_1 \wedge \Phi_2$ oder $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2$ oder $\Phi = \neg \Phi_1$, wobei Φ_1, Φ_2 kürzere Formeln sind.

$\Rightarrow$ Ein Satz ist ein logischer Ausdruck, der entweder wahr oder falsch ist.

Bsp.:

$$\forall x_1 \forall x_2 (R_{\leq}(x_1, x_2) \vee R_{\leq}(x_2, x_1))$$

Definition:

Für fest vorgegebene Relationen $R_1, \dots, R_k$ sei die Sprache L der wahren Sätze definiert als:

$$L = \{s = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_l x_l \Phi \mid s \text{ ist wahr}\}$$

Satz 1: Satz von Church

Falls $k = 2$ und R_1 die Additionsrelation, R_2 die Multiplikationsrelation, so ist L nicht rekursiv.

Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz beruht auf folgender Annahme über Beweise:

1. Ein Beweis π eines Satzes s kann von einer TM überprüft werden, d.h. die Sprache

$$\{s\pi \mid \pi \text{ ist Beweis von } s\}$$

ist rekursiv.

2. Ist π ein Beweis des Satzes s , dann ist s wahr.

Satz 2:

Die Sprache L' aller beweisbaren Sätze ist rekursiv aufzählbar.

($L' = \{s \text{ Satz} \mid \exists \text{ Beweis } \pi \text{ für } s\}$)

Beweis:

Konstruiere TM, die alle möglichen Beweise der Reihe nach durchprobiert. Die TM hält an und akzeptiert, sobald sie einen gültigen Beweis gefunden hat. $\square$

Satz (Gödel):

Es sei L die Sprache, die mittels Additions- und Multiplikationsrelation definiert ist. Dann gibt es Sätze in L , die nicht beweisbar sind.

Beweis:

Annahme: $L' = L$. Gegeben sei Satz s . Frage: $s \in L$? (ist s wahr?)

Betrachte auch die Negation von s : $\neg s$. Beobachtung: $\neg s$ ist selbst wieder ein Satz.

Nehme jetzt die TM aus Beweis von Satz 2 und lasse sie parallel auf s und $\neg s$ laufen. Nach endlicher Zeit findet die TM einen Beweis für s oder für $\neg s$. $\square$

$\nrightarrow$ zu Satz 1.