

Theoretische Informatik - Übungsblatt 9
Übungsgruppe 7 - Mi, 16-18 Uhr
Elena Kvassova

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)

Aufgabe 1

Gegeben sind zwei reguläre Sprachen L_1 und L_2 . Für diese Sprachen sei jeweils ein endlicher Automat A_1 bzw. A_2 gegeben (die Existenz dieser Automaten ergibt sich aus der Regularität der Sprachen). Der Automat A_1

- arbeite auf dem Alphabet Σ_1 ,
- habe die Zustandsmenge $Q_1 = \{q_0, \dots, q_n\}$,
- habe den Startzustand q_0 ,
- habe die Menge F_1 der akzeptierenden Endzustände und
- habe die Zustandsüberföhrungsfunktion $\delta_1 : Q_1 \times \Sigma_1 \rightarrow Q_1$.

Der Automat A_2

- arbeite auf dem Alphabet Σ_2 ,
- habe die Zustandsmenge $Q_2 = \{r_0, \dots, r_m\}$,
- habe den Startzustand r_0 ,
- habe die Menge F_2 der akzeptierenden Endzustände und
- habe die Zustandsüberföhrungsfunktion $\delta_2 : Q_2 \times \Sigma_2 \rightarrow Q_2$.

Wir können aus diesen beiden Automaten A_1 und A_2 einen neuen endlichen Automaten A bauen, der die Sprache $shuffle(L_1, L_2)$ akzeptiert. Dieser neue Automat A

- arbeitet auf dem Alphabet $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$,
- hat die Zustandsmenge $Q = Q_1 \times Q_2 \times \{1, 2, 3\}$,
- hat den Startzustand $(q_0, r_0, 1)$,
- hat die Menge $F = \{(q_i, r_j, 1) \mid q_i \in F_1 \wedge r_i \in F_2\}$ der akzeptierenden Endzustände und
- hat die Zustandsüberföhrungsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ (siehe unten).

Jeder Zustand von A ist ein Tupel,

- dessen erste Komponente aussagt, in welchem Zustand sich der (simulierte) Automat A_1 befindet,
- dessen zweite Komponente aussagt, in welchem Zustand sich der (simulierte) Automat A_2 befindet und
- dessen dritte Komponente folgende Bedeutung hat:
 - der Wert 1 bedeutet, dass A_1 das nächste Zeichen verarbeiten muss
 - der Wert 2 bedeutet, dass A_2 das nächste Zeichen verarbeiten muss
 - der Wert 3 bedeutet, dass bereits ein Fehler aufgetreten ist und dass das Wort auf *keinen* Fall mehr akzeptiert werden kann

Indem wir nur Zustände zum Endzustand erklären, für die sowohl der (simulierte) A_1 als auch der (simulierte) A_2 jeweils in einem ihrer Endzustände sind als auch die letzte Komponente des Zustands gleich 1 ist, stellen wir sicher, dass bei Erreichen eines Endzustandes von A die beiden Automaten A_1 und A_2 *gleich viele* Zeichen abgearbeitet haben und beide ihr Teilwort akzeptiert haben.

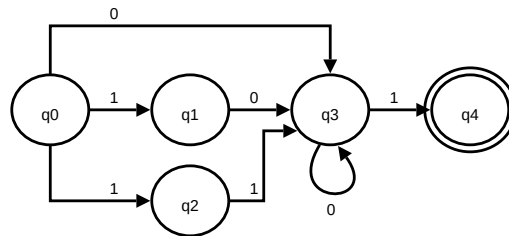
Die Zustandsüberföhrungsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ stellt sich dann wie folgt dar:

$$\delta((q_i, r_j, k), a) = \begin{cases} (\delta_1(q_i, a), r_j, 2) & k = 1 \wedge a \in \Sigma_1 \\ (q_i, \delta_2(r_j, a), 1) & k = 2 \wedge a \in \Sigma_2 \\ (q_i, r_j, 3) & k = 3 \vee (k = 1 \wedge a \notin \Sigma_1) \vee (k = 2 \wedge a \notin \Sigma_2) \end{cases}$$

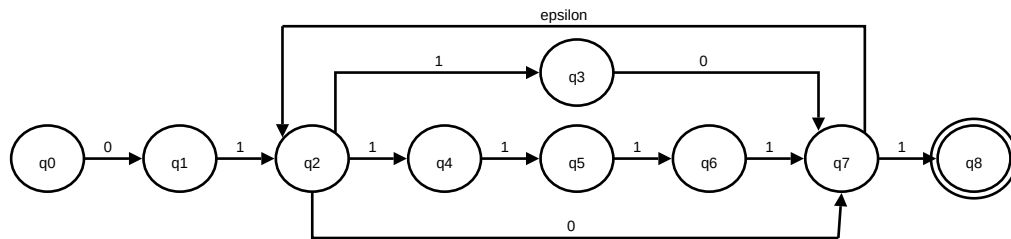
Da wir diesen Automaten A konstruieren konnten, ist offensichtlich die Sprache $shuffle(L_1, L_2)$ regulär. $\square$

Aufgabe 2

(a) NFA zu $10+(0+11)0^*1$



(b) NFA zu $01(((10)^*+1111)+0)^*1$



Aufgabe 3

- (a) Der folgende reguläre Ausdruck beschreibt die Sprache der Dezimalzahlen von 0 bis 255 ohne führende Nullen:
- $$\begin{aligned}
 &(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9) + \\
 &(\ (1+2+3+4+5+6+7+8+9)\ (0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)\) + \\
 &(\ 1\ (0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)\ (0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)\) + \\
 &(\ 2\ (0+1+2+3+4)\ (0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)\) + \\
 &(\ 25\ (0+1+2+3+4+5)\)
 \end{aligned}$$
- (b) Der folgende reguläre Ausdruck beschreibt die Sprache der römischen Zahlen von 1 bis 3999:
- $$\begin{aligned}
 &(\varepsilon + M + MM + MMM) \cdot \\
 &(\varepsilon + D) \cdot \\
 &(\varepsilon + C + CC + CCC + CD + CM) \cdot \\
 &(\varepsilon + L) \cdot \\
 &(\varepsilon + X + XX + XXX + XL + XC) \cdot \\
 &(\varepsilon + V) \cdot \\
 &(\varepsilon + I + II + III + IV + IX)
 \end{aligned}$$
- (c) Der folgende reguläre Ausdruck beschreibt die durch den DFA von Aufgabenblatt 7 Aufgabe 1 akzeptierte Sprache.
- $$\begin{aligned}
 &(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)^* \cdot , \cdot (\\
 &\quad ((14285 + 4285 + 285 + 85 + 5 + \varepsilon) \cdot (714285)^* \cdot \\
 &\quad \quad (7 + 71 + 714 + 7142 + 71428 + 714285)) + \\
 &\quad 1 + 14 + 142 + 1428 + 14285 + 4 + 42 + 428 + 4285 + \\
 &\quad \quad 2 + 28 + 285 + 8 + 85 + 5 \\
 &\quad)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) Kontextfreie Grammatik für die Sprache $L = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \vee j \neq k\}$:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow a A U C \\ &\rightarrow U B b C \\ &\rightarrow A b B V \\ &\rightarrow A V C c \\ U &\rightarrow \varepsilon \\ &\rightarrow a U b \\ V &\rightarrow \varepsilon \\ &\rightarrow b V c \\ A &\rightarrow \varepsilon \\ &\rightarrow A a \\ B &\rightarrow \varepsilon \\ &\rightarrow B b \\ C &\rightarrow \varepsilon \\ &\rightarrow C c \end{aligned}$$

(b) Kontextfreie Grammatik für die Menge aller arithmetischen Ausdrücke über $\{+, \star, a, b, c, (,)\}$:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S + M \\ M &\rightarrow M \star A \\ &\rightarrow A \\ A &\rightarrow (S) \\ &\rightarrow a \\ &\rightarrow b \\ &\rightarrow c \end{aligned}$$