

Theoretische Informatik - Übungsblatt 6  
Übungsgruppe 7 - Mi, 16-18 Uhr  
Elena Kvassova

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)  
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)

## Aufgabe 2

Die zu beweisende Implikation lässt sich auch durch einen äquivalenten Ausdruck darstellen

$$\begin{aligned} L_1 \in P &\Rightarrow L_1 \leq_p L_2 \\ \iff (L_1 \notin P) &\vee (L_1 \leq_p L_2) \end{aligned}$$

Wir beweisen die Aussage durch einen Widerspruchsbeweis. Dazu negieren wir die Aussage und suchen ein Gegenbeispiel. Wenn wir ein Gegenbeispiel finden, muss die behauptete negierte Aussage falsch sein und somit die ursprüngliche Aussage richtig sein. Behauptung für Widerspruchsbeweis:

$$\begin{aligned} &\overline{(L_1 \notin P) \vee (L_1 \leq_p L_2)} \\ \implies &\overline{(L_1 \notin P) \wedge (L_1 \leq_p L_2)} \\ \implies &(L_1 \in P) \wedge (L_1 \not\leq_p L_2) \end{aligned}$$

Wähle ein beliebiges  $L_1 \in P$ , jedoch mit  $L_1 \neq \emptyset$  und  $L_1 \neq \Sigma^*$ . Setze  $L_2 = L_1$ . Es ist offensichtlich, dass  $L_1$  mit der Identitätsfunktion  $f(w) = w$  in polynomieller Zeit auf  $L_2$  reduzierbar ist. Somit ist bereits ein Gegenbeispiel zur Behauptung des Widerspruchsbeweises gefunden und die Aussage in der Aufgabe muss wahr sein.  $\square$

## Aufgabe 3

(a) Für einen gegebenen DHC  $v_1, \dots, v_n$  auf  $G = (V, E)$  sei  $f(G, v_i) = (G', v'_i)$  mit

$$G' = (V, E') \text{ mit } E' = E \setminus \{(v_1, v_2)\} \text{ und}$$

$$v'_i = \begin{cases} v_{i-1} & \text{für } i \geq 2 \\ v_n & \text{für } i = 1 \end{cases}$$

gegeben. Die Funktion  $f$  ist offensichtlich in polynomieller Zeit berechenbar.

Den **Sonderfall**, dass für die Eingabe  $w$  in  $E$  die Kante von Knoten  $v_1$  nach  $v_2$  nicht existiert, also  $(v_1, v_2) \notin E$ , betrachten wir an dieser Stelle gesondert. In diesem Fall ersetzen wir die Funktion  $f$  durch die Identität, setzen also  $v'_i = v_i$  und  $E' = E$ . Es ist klar, dass unter der Voraussetzung  $(v_1, v_2) \notin E$  kein DHC sein kann (die Implikation „ $w \in L_1 \implies \dots$ “ muss nicht bewiesen werden, da die Voraussetzung nie wahr sein kann) und dass  $f(w)$  kein DHP sein kann (die Implikation „ $\dots \Leftarrow f(w) \in L_2$ “ muss nicht bewiesen werden, da die Voraussetzung nie wahr sein kann). Damit ist die Äquivalenz für diesen Sonderfall gezeigt. In der übrigen Betrachtung wird dieser Sonderfall nicht mehr berücksichtigt und es wird angenommen, dass  $(v_1, v_2) \in E$  gilt.

Zeigen zunächst die **Implikationsrichtung**  $\mathbf{w} \in \mathbf{L}_1 \implies \mathbf{f}(\mathbf{w}) \in \mathbf{L}_2$ . Wenn  $w \in L_1 = \text{DHC}$  gilt, dann gilt  $(v_i, v_{i+1}) \in E \forall 1 \leq i < n$  und  $(v_n, v_1) \in E$ . Nach Anwendung der Funktion  $f$  existieren mindestens noch die Kanten  $(v_i, v_{i+1}) \in E' \forall 2 \leq i < n$  und  $(v_n, v_1) \in E'$ , es gilt jedoch auf jeden Fall  $(v_1, v_2) \notin E'$ . In Hinblick auf die neue Nummerierung existieren mindestens die Kanten  $(v'_i, v'_{i+1}) \in E' \forall 1 \leq i < n-1$  und  $(v'_{n-1}, v'_n) \in E'$ . Es gilt also  $(v'_i, v'_{i+1}) \in E' \forall 1 \leq i < n$ . Somit liegt ein DHP vor und es gilt  $f(w) \in L_2 = \text{DHP}$ .

Zeigen jetzt die **Implikationsrichtung**  $\mathbf{w} \in \mathbf{L}_1 \Leftarrow \mathbf{f}(\mathbf{w}) \in \mathbf{L}_2$ . Wenn  $f(w) \in L_2 = \text{DHP}$  gelten soll, müssen mindestens die Kanten  $(v'_i, v'_{i+1}) \in E' \forall 1 \leq i < n$  existieren. Diese Kanten entsprechen vor der Transformation den Kanten  $(v_i, v_{i+1}) \in E \forall 2 \leq i < n$  und  $(v_n, v_1) \in E$ . Nehmen wir die Kante  $(v_1, v_2) \in E$

die wir durch die Funktion  $f$  explizit entfernt haben (und die nach Ausschluss des obigen Sonderfalls existiert haben muss) hinzu, so wissen wir nun, dass die Kanten  $(v_i, v_{i+1}) \in E \forall 1 \leq i < n$  und  $(v_n, v_1) \in E$  existieren. Damit haben wir einen DHC und es gilt  $w \in L_1 = \text{DHC}$ .

Aus  $w \in L_1 \implies f(w) \in L_2$  und  $w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$  folgt  $w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$ . Somit ist  $L_1 \leq_p L_2$  und  $\text{DHC} \leq_p \text{DHP}$ . In Verbindung mit dem oben bewiesenen Sonderfall ist die Aussage allgemeingültig.  $\square$

- (b) Sei ein DHP  $v_1, \dots, v_n$  auf  $G = (V, E)$  gegeben. Um einen DHC zu erhalten müssen wir lediglich noch die Kante  $(v_n, v_1)$  in den Graphen aufnehmen, sofern diese noch nicht existiert. Das Hinzufügen einer Kante ist trivialerweise in polynomieller Zeit realisierbar. Ein DHC ist also  $v'_i = v_i \forall i$  auf  $G' = (V, E')$  mit  $E' = E \cup \{(v_n, v_1)\}$ . Damit ist die Implikationsrichtung  $w \in L_1 \implies f(w) \in L_2$  gezeigt. Die umgekehrte Implikation  $w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$  ist ebenfalls trivial, da unter der Voraussetzung  $f(w) \in L_2 = \text{DHC}$  die Kanten  $(v_i, v_{i+1}) \in E' \forall 1 \leq i < n$  und  $(v_n, v_1) \in E'$  existieren müssen und wir höchstens die Kante  $(v_n, v_1)$  eingefügt haben und somit  $E$  mindestens die Kanten  $(v_i, v_{i+1}) \in E \forall 1 \leq i < n$  enthalten muss. Dies reicht bereits aus, um einen DHP zu haben. Somit ist DHP auf DHC reduzierbar und es gilt  $\text{DHP} \leq_p \text{DHC}$ .  $\square$

## Aufgabe 4

- (a) Eine Disjunktion von Monomen ist immer dann erfüllbar, wenn mindestens ein Monom erfüllbar ist. Ein Monom ist offensichtlich genau dann erfüllbar, wenn kein Literal sowohl in der nicht-negierten als auch in der negierten Form in dem Monom auftritt. Die Prüfung der Erfüllbarkeit eines Monoms ist trivial in linearer Zeit  $\mathcal{O}(n)$  realisierbar. Somit ist die Prüfung der Erfüllbarkeit der Disjunktion ebenfalls in linearer Zeit  $\mathcal{O}(m \cdot n)$  realisierbar.  $\square$
- (b) Nach den Sätzen von De Morgan gilt, dass die Negation einer Disjunktion von Monomen (aus unserem Problem) eine Konjunktion von Co-Monomen ist (ein Co-Monom ist eine Disjunktion von Literalen). Zum Beispiel ist

$$\overline{x_1 x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 x_4} = (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4})$$

Damit lässt sich unser Problem, eine Variablenbelegung  $a \in \{0, 1\}^n$  zu finden, so dass die Disjunktion von Monomen gleich 0 ist, auf die Suche einer Variablenbelegung  $a \in \{0, 1\}^n$ , so dass eine Konjunktion von Co-Monomen gleich 1 ist, überführen. Dass dieses Problem NP-vollständig ist, wurde durch den *Satz von Cook* bereits bewiesen, so dass auch unser Problem NP-vollständig ist.  $\square$

## Aufgabe 5

- (a) Beweis-Konstruktion analog zum Beweis von Satz 3.4.2 zum Cliques-Problem. Sei  $C = (c_1, \dots, c_m)$  mit  $c_i = z_{i1} \wedge z_{i2} \wedge z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \overline{x_1}, \dots, x_n, \overline{x_n}\}$  eine Eingabe für das „negierte 3-SAT-Problem“.

Unter dem „negierten 3-SAT-Problem“ verstehen wir das Problem der *Nicht-Erfüllbarkeit* einer Disjunktion von Co-Monomen (jeweils bestehend aus der Konjunktion von drei Literalen). Dieses Problem lässt sich trivial auf das reguläre 3-SAT-Problem überführen.

Die Eingabe  $f(C) = (G, k)$  mit  $G = (V, E)$  für das Independent-Set-Problem (IP) soll folgendermaßen aussehen.  $V$  enthält  $3m$  Knoten  $(i, j), 1 \leq i \leq m, 1 \leq$

$j \leq 3$ , die die Literale in den Klauseln darstellen.  $E$  enthält die Kante zwischen  $(i, j)$  und  $(i', j')$ , wenn  $i = i'$  ist (es handelt sich um Knoten aus den *gleichen* Klauseln) und  $z_{ij} \neq \bar{z}_{i'j'}$  ist (die Literale können gleichzeitig erfüllt sein). Schließlich sei  $k = m$ . Natürlich ist  $f$  in polynomieller Zeit berechenbar.

Sei nun  $a$  eine Belegung, die *keine* Klausel erfüllt. Dann ist in jeder Klausel mindestens ein Literal *nicht* erfüllt. Wir betrachten die zugehörigen  $m$  Repräsentanten in  $G$ . Der Graph  $G$  enthält auf ihnen ein Independent Set, da die Literale nicht aus den gleichen Klauseln kommen und gleichzeitig erfüllt sind.

Wenn  $G$  andererseits ein Independent Set der Größe  $m$  enthält, müssen die Knoten des Independent Set Literale aus verschiedenen Klauseln repräsentieren. Darüber hinaus ist es *nicht* möglich, eines dieser Literale zu erfüllen. Die Klauselmengemenge  $C$  ist also erfüllbar und damit ist IP NP-vollständig.  $\square$

- (b) Das Vertex-Cover-Problem (VC) lässt sich auf IP überführen. Die Menge  $V \setminus V'$  enthält alle Knoten, die von keiner Kante aus  $E$  berührt werden, und möglicherweise weitere Knoten. Diese weiteren Knoten sind offensichtlich *nicht* durch Kanten mit Knoten aus  $V \setminus V'$  verbunden (eine Kante verbindet immer genau zwei Knoten; nach Voraussetzung muss sich mindestens einer der beiden Knoten in  $V'$  befinden; somit können nicht beide in  $V \setminus V'$  sein, da ein Knoten nicht gleichzeitig in  $V'$  und  $V \setminus V'$  enthalten sein kann, da  $V \cap (V \setminus V') = \emptyset$ ).

Es ist klar, dass  $V \setminus V'$  ein Independent Set darstellt, da es wie oben gezeigt keine Kanten zwischen zwei Knoten aus dieser Menge gibt. In Aufgabenteil (a) haben wir bereits gezeigt, dass das IP NP-vollständig ist. Da sich  $V'$  aus  $V$  und  $V \setminus V'$  bestimmen lässt, ist auch VC NP-vollständig.  $\square$