

Theoretische Informatik - Übungsblatt 3
Übungsgruppe 7 - Mi, 16-18 Uhr
Elena Kvassova

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)

Aufgabe 1

- (a) Eine Relation $\circ$ heißt transitiv, wenn gilt $a \circ b \wedge b \circ c \implies a \circ c$. Es ist offensichtlich, dass für die Relation $\leq$ aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq b \leq c \implies a \leq c$. $\square$
- (b) Aus $f^{-1}(L_2) = L_1$ folgt direkt, dass die Funktion f für jedes $w \in L_1$ definiert ist. Die Bildmenge $f(L_1)$ ist nicht notwendigerweise gleich L_2 , sie kann auch kleiner sein. Sie wird jedoch auf jeden Fall Teilmenge von L_2 sein, da anderenfalls die Voraussetzung verletzt würde.

$$\begin{aligned} (w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2) &\implies f(L_1) \subseteq L_2 \\ &\implies f^{-1}(L_2) = L_1 \\ f^{-1}(L_2) = L_1 &\implies f(L_1) \subseteq L_2 \\ &\implies (w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2) \end{aligned}$$

$\square$

- (c) Folgende Relation ist offensichtlich richtig

$$f(L_1) = L_2 \implies (w \in L_1 \Rightarrow f(w) \in L_2)$$

Aus $f(L_1) = L_2$ folgt jedoch *nicht*, dass $f(w) \in L_2 \Rightarrow w \in L_1$, da es $w \notin L_1$ geben kann, für die $f(w) \in L_2$ gilt. $\nexists$

- (d) Nach Voraussetzung ist L_1 auf L_2 reduzierbar, das heißt es gibt eine Turingmaschine M_f , die von einem Wort $w \in L_1$ auf ein Wort $w' = f(w) \in L_2$ abbildet. Ferner existiert eine Turingmaschine M_2 , die jedes Wort aus L_2 akzeptiert. Damit L_1 rekursiv aufzählbar ist, muss es eine Turingmaschine M geben, die für jedes Wort aus L_1 akzeptiert. Wir konstruieren M mit der Eingabe w wie folgt:

- berechnen $w' = f(w)$ mittels M_f
- setze Eingabe w' für Turingmaschine M_2
- M akzeptiert ursprüngliche Eingabe w , wenn M_2 die Eingabe w' akzeptiert

Es ist offensichtlich, dass M alle Wörter aus L_1 akzeptiert. Somit ist bewiesen, dass unter den genannten Voraussetzungen L_1 rekursiv aufzählbar ist (Beweis durch Konstruktion). $\square$

Aufgabe 2

- (a) Mit a_i gleich der Länge des Wortes x_i und b_i gleich der Länge des Wortes y_i reduziert sich das Problem auf

$$\exists k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \quad \left| \quad \sum_{i=1}^n k_i \cdot a_i = \sum_{i=1}^n k_i \cdot b_i \text{ mit } \sum_{i=1}^n k_i > 0 \right.$$

Vermutung: entscheidbar, läuft auf die Entscheidung der Lösbarkeit dieses Gleichungssystems hinaus

- (b) Vermutung: nicht entscheidbar

- (c) Wenn man sich auf Wortpaare gleicher Länge beschränkt, ist das Post'sche Korrespondenzproblem *entscheidbar*. Damit die aus den Tupeln gebildeten Zeichenketten $x_{i_1}x_{i_2}\dots$ und $y_{i_1}y_{i_2}\dots$ gleich sein können, müssen sie mindestens mit dem selben Wort beginnen, also muss $x_{i_1} = y_{i_1}$ gelten. Es muss also ein Tupel (x_j, y_j) mit $x_j = y_j$ gefunden werden. Die Existenz eines solchen Tupels lässt sich aufgrund der Endlichkeit der Anzahl dieser Tupel in endlicher Zeit entscheiden. Wurde eine solcher Index j gefunden, ist trivialerweise bereits eine Lösung gefunden, nämlich die $n = 1$ elementige Folge von Indices $i_1 = j$. Wird kein solcher Index gefunden, gibt es keine Lösung. $\square$

Aufgabe 3

Wir zeigen die Existenz der Funktion p durch Konstruktion einer Turingmaschine, die p berechnet. Die durch die Gödelnummer beschriebene Turingmaschine P_w verwendet den Startzustand q_1 (wechselt ohne Änderung zu q_3 , den akzeptierenden Endzustand q_2 , eine Reihe von Zuständen (Anzahl gleich der Länge des Wortes w), von denen jeder genau ein Zeichen des Wortes schreibt und dann einen Schritt nach rechts geht, und zwei Zustände zum Finden des Anfangs der Ausgabe. Wir verwenden zur Realisierung eine 3-Band-Turingmaschine. Die Konstruktion dieser Turingmaschine funktioniert wie folgt:

1. auf Band 1 befindet sich das Wort w , die Bänder 2 und 3 sind noch leer, Band 2 wird temporär die Ausgabe enthalten und Band 3 temporär die aktuelle Zustandsnummer $i \geq 1$ als Folge von i Nullen
2. schreibe auf Band 2
 - dreimal eine 1 (jeweils nach rechts gehen, Beginn der Gödelnummer)
 - schreibe Gödelcode für $(q_1, B) \rightarrow (q_3, B, N)$ (der Standzustand für P_w ; da das Band zu Beginn leer ist, braucht nur die Eingabe B berücksichtigt werden)
 - für den akzeptierende Endzustand q_2 von P_w braucht nach Definition Gödelnummer nichts geschrieben zu werden (keine Aktion im Endzustand)
3. schreibe auf Band 3 dreimal eine 0 und gehe jeweils einen Schritt nach rechts (Initialisierung der aktuellen Zustandsnummer mit 3)
4. wenn von Band 1 ein B gelesen wird (Wortende erreicht), dann gehe zu ??
5. sonst kopiere Inhalt Band 3 (Folge von Nullen) ab aktueller Position auf Band 2 (aktuelle Zustandsnummer)
6. schreibe eine 1 auf Band 2 (Trennzeichen)
7. schreibe dreimal 0 auf Band 2 (P_w liest ein B)
8. schreibe eine 1 auf Band 2 (Trennzeichen)
9. hänge an die Zustandsnummer auf Band 3 eine 0 an (die aktuelle Zustandsnummer wird inkrementiert)
10. kopiere Inhalt Band 3 auf Band 2 (nachfolgende Zustandsnummer)
11. schreibe eine 1 auf Band 2 (Trennzeichen)
12. wenn das aktuelle Zeichen von Band 1 eine 0 ist, schreiben wir eine 0 auf Band 2, wenn es eine 1 ist schreiben wir zwei Nullen

13. schreibe eine 1 auf Band 2 (Trennzeichen)
14. schreibe drei Nullen auf Band 2 (P_w soll einen Schritt nach rechts machen)
15. schreibe zweimal eine 1 auf Band 2 (Ende Gödelcode)
16. gehe zu ??
17. schreibe auf Band 2 die entsprechenden Gödelcodes, so dass die Turingmaschine P_w bis zum Beginn ihrer Ausgabe nach links läuft und auf dem ersten Zeichen der Ausgabe stehen bleibt und zum Zustand q_2 von P_w springt (bestehend aus zwei Zuständen, der erste trägt die auf Band 3 enthaltene Zustandsnummer, der zweite die nachfolgende)
18. schreibe dreimal eine 1 (Abschluß der Gödelnummer)
19. kopiere Inhalt von Band 2 auf Band 1 und laufe solange nach links, bis Lesekopf auf dem ersten Zeichen der Ausgabe steht, springe dann zu unserem akzeptierenden Endzustand

Aufgabe 4

- (a) Die Aussage lässt sich wie folgt formulieren:

$$\forall k > 1 \quad \exists p, q \quad | \quad p + q = 2 \cdot k \text{ mit}$$

$$p, q \in \left\{ n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \mid \nexists a, b \in \{2, \dots, n-1\} : a \cdot b = n \right\}$$

- (b) Seien $a, b, n, r_i \in \mathbb{N}$. Seien ferner $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\nexists n \neq 1 : q_1 = n \cdot a \wedge q_2 = n \cdot b$$

Es gilt

$$\forall q_1, q_2, r_i \text{ mit } 0 \leq r_i \leq q_i \quad \exists x \text{ mit } 0 \leq x \leq q_1 q_2$$

so dass $\exists n$ mit $q_i n = x - r_i$ für $i \in \{1, 2\}$