

Theoretische Informatik - Übungsblatt 11
Übungsgruppe 7 - Mi, 16-18 Uhr
Elena Kvassova

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Dirk Heine (Matrikelnummer 2030941)

Aufgabe 1

Kontextsensitive Grammatik für $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \\ A &\rightarrow aABC \\ &\rightarrow \varepsilon \\ CB &\rightarrow BC \\ aB &\rightarrow ab \\ bB &\rightarrow bb \\ bC &\rightarrow bc \\ cC &\rightarrow cc \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) Die Sprache $L = \{a^i b^j \mid i^2 = j\}$ ist *nicht* kontextfrei. Beweis durch Widerspruch zum Pumping Lemma. Das Wort $z = a^{n^2} b^n$ ist offensichtlich in L_1 enthalten. Es sind drei Zerlegungen $uvwxy$ des Wortes z möglich:

- Sei $vw x = a^s$ mit $s \leq n$. Entweder in v oder in x muss mindestens ein a enthalten sein. Konstruieren wir mit $i = 0$ das Wort $uv^i wx^i y$, erhalten wir uwy . In uwy fehlt mindestens ein a , so dass $i^2 < j$ gilt. Widerspruch.
- Sei $vw x = b^t$ mit $t \leq n$. Entweder in v oder in x muss mindestens ein b enthalten sein. Konstruieren wir mit $i = 0$ das Wort $uv^i wx^i y$, erhalten wir uwy . In uwy fehlt mindestens ein b , so dass $i^2 > j$ gilt. Widerspruch.
- Sei $vw x = a^s b^t$ mit $s, t \geq 1$ und $s + t \leq n$. Entweder muss in v mindestens ein a oder in x mindestens ein b enthalten sein. Es ist *nicht* zulässig, dass v auch b 's enthält und dass x auch a 's enthält (da durch v^i bzw. x^i sonst a 's auf b 's folgen könnten, was die Sprache jedoch nicht erlaubt). Sei $k = |v|$ somit die Anzahl der a 's in v und $l = |x|$ die Anzahl der b 's in x . Wir wählen $q = 0$ und bilden das Wort $uv^q wx^q y = uwy$. Gegenüber dem ursprünglichen Wort $uvwxy = z = a^{n^2} b^n$ sind k weniger a 's und l weniger b 's in uwy enthalten. Es soll gelten:

$$\begin{aligned} n^2 - k &\stackrel{!}{=} n - l \\ \iff n^2 - n - (k - l) &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Es gilt offensichtlich $0 \leq k \leq n$ und $0 \leq l \leq n$. Somit ist $-n \leq k - l \leq n$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n \geq 3$. Dann ist $n^2 - n - n > 0$ und auch $n^2 - n - (-n) = n^2 - n + n > 0$ und somit die Bedingung nicht erfüllt. Widerspruch.

Weitere Zerlegungen sind offensichtlich nicht möglich. Somit liegt ein Widerspruch zum Pumping Lemma vor und die Sprache L_1 ist *nicht* kontextfrei. $\nexists$

(b) Die Sprache $L_2 = \{a^i b^j \mid i = j \text{ oder } i = 2j\}$ ist kontextfrei, da wir eine kon-

textfreie Grammatik für diese Sprache bauen können:

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow S_1 \\
 &\rightarrow S_2 \\
 S_1 &\rightarrow aS_1b \\
 &\rightarrow \varepsilon \\
 S_2 &\rightarrow aaS_2b \\
 &\rightarrow \varepsilon
 \end{aligned}$$

□

- (c) Die Sprache $L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i + j = k, \quad i, j, k \geq 0\}$ ist kontextfrei, da wir einen Kellerautomaten bauen können, der die Sprache akzeptiert:

$$\begin{aligned}
 Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \\
 \Sigma &= \{a, b, c\} \\
 \Gamma &= \{x\} \\
 q_0 &\text{ sei Anfangszustand} \\
 Z_0 &= \emptyset \\
 F &= \{q_3\}
 \end{aligned}$$

$$\delta = \left\{ \begin{array}{ll} (q_0, a, S) &\rightarrow (q_0, xS) \\ (q_0, b, S) &\rightarrow (q_1, xS) \\ (q_1, b, S) &\rightarrow (q_1, xS) \\ (q_1, c, xS) &\rightarrow (q_2, S) \\ (q_2, c, xS) &\rightarrow (q_2, S) \\ (q_2, \varepsilon, \emptyset) &\rightarrow (q_3, \emptyset) \end{array} \right.$$

In Zustand q_0 wird für jedes gelesene a ein x auf den Stack geschrieben. Sobald ein b gelesen wird, wird in q_1 gewechselt. Weiterhin wird für jedes b ein x auf den Stack geschrieben. Auf dem Stack steht also nachdem alle a und b gelesen wurden, genau $i + j$ mal das Zeichen x . Bei jedem gelesenen c wird ein x vom Stack entfernt. Nur wenn der Stack leer ist ($i + j = k$) und das Wort komplett gelesen wurde, wird das Wort akzeptiert.

Jede Sprache, für die sich ein Kellerautomat bauen lässt, der diese Sprache akzeptiert, ist kontextfrei. Somit ist L_3 kontextfrei. □

- (d) Die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ aus Aufgabe 1 ist offensichtlich eine Teilsprache von L_4 . Wie wir bereits in der Vorlesung gezeigt haben, ist die Sprache L *nicht* kontextfrei. Somit ist auch die Sprache L_4 *nicht* kontextfrei. ⚡
- (e) Die Sprache $L_5 = \{v\#w \mid v \in \mathbb{B}^* \text{ ist Teilwort von } w \in \mathbb{B}^*\}$ ist *nicht* kontextfrei, da man keinen Kellerautomaten bauen kann, der die Sprache akzeptiert. Man müsste analog zu Aufgabenteil (f) das zu suchende Teilwort auf den Stack bringen. Da das Teilwort nur von links nach rechts einmal gelesen werden kann, kann es nur in reversierter Reihenfolge auf dem Stack liegen. Somit wäre das *letzte* Zeichen des Teilworts das oberste Zeichen auf dem Stack. Da nur das oberste Zeichen des Stacks gelesen werden kann, könnten wir höchstens nach möglichen *Endpositionen* des Teilwortes suchen. Sobald wird eine mögliche Endposition gefunden haben, haben wir aber bereits den Rest des möglichen Treffers überlesen und können nicht mehr entscheiden, ob das Wort in der Sprache enthalten ist. ⚡

- (f) Die Sprache $L_6 = \{v^R \# w \mid v \in \mathbb{B}^* \text{ ist Teilwort von } w \in \mathbb{B}^*\}$ ist kontextfrei, da wir einen (nicht-deterministischen) Kellerautomaten bauen können, der die Sprache L_6 akzeptiert:

$$\begin{aligned}
 Q &= \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \\
 \Sigma &= \mathbb{B} \cup \{\#\} \\
 \Gamma &= \mathbb{B} \\
 q_0 &\text{ sei Anfangszustand} \\
 Z_0 &= \emptyset \\
 F &= \{q_3\}
 \end{aligned}$$

$$\delta = \left\{ \begin{array}{ll} (q_0, 0, S) & \rightarrow (q_0, 0S) \\ (q_0, 1, S) & \rightarrow (q_0, 1S) \\ (q_0, \#, S) & \rightarrow (q_1, S) \\ (q_1, 0, 0S) & \rightarrow (q_2, S) \\ (q_1, 1, 1S) & \rightarrow (q_2, S) \\ (q_1, 0, S) & \rightarrow (q_1, S) \\ (q_1, 1, S) & \rightarrow (q_1, S) \\ (q_2, 0, 0S) & \rightarrow (q_2, S) \\ (q_2, 1, 1S) & \rightarrow (q_2, S) \\ (q_2, 0, \emptyset) & \rightarrow (q_3, \emptyset) \\ (q_2, 1, \emptyset) & \rightarrow (q_3, \emptyset) \end{array} \right.$$

Die Konstruktion eines (nicht-deterministischen) Kellerautomaten ist möglich, da das zu suchende Teilwort in reversierter Reihenfolge gelesen wird und durch das Speichern auf dem Stack dann in korrekter Reihenfolge vorliegt (LIFO-Prinzip des Stacks).

Im Zustand q_0 wird das zu suchende Teilwort auf den Stack übertragen, in Zustand q_1 werden mögliche Startpositionen für das Teilwort gesucht und in Zustand q_2 wird ab einer möglichen Startposition das Teilwort verglichen. Nach erfolgreichem vollständigen Vergleichen des Teilworts (Stack ist leer) wird die Eingabe akzeptiert.

Jede Sprache, für die sich ein Kellerautomat bauen läßt, der diese Sprache akzeptiert, ist kontextfrei. Somit ist L_3 kontextfrei. $\square$

Aufgabe 3

- (a) Nein, es gibt *keine* inhärent mehrdeutige *reguläre* Sprachen. Man kann jeder Sprache L *genau* eine Äquivalenzrelation R_L zuordnen. Gäbe es eine inhärent mehrdeutige *reguläre* Sprache, dann müsste es mindestens zwei *verschiedene* Minimalautomaten geben, die die Sprache akzeptieren. Jedem dieser Minimalautomaten könnten wir dann *verschiedene* Äquivalenzrelationen zuordnen. Dies widerspricht dem Satz, dass man jeder Sprache *genau* eine Äquivalenzrelation zuordnen kann. ζ

(b) Kontextfreie Grammatik für die Menge der regulären Ausdrücke über $\{a, b\}$:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S + M \\ &\rightarrow M \\ M &\rightarrow M \cdot P \\ &\rightarrow P \\ P &\rightarrow A^* \\ &\rightarrow A \\ A &\rightarrow \emptyset \\ &\rightarrow \varepsilon \\ &\rightarrow a \\ &\rightarrow b \\ &\rightarrow (S) \end{aligned}$$