

Rechnerarchitektur - Übungsblatt 7
Übungsgruppe 8 - Di, 15-17 Uhr
Steffen Heil

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)
Carsten Saar (Matrikelnummer 2030107)
Thomas Ospelt (Matrikelnummer 2029959)
Timo Adam (Matrikelnummer 2031946)

Aufgabe 1

(a) Sei $n = 2^k$. Somit ist $k = \log_2 n$.

$$\begin{aligned} C(\text{PP}_\circ(1)) &= 0 \\ C(\text{PP}_\circ(n)) &= C\left(\text{PP}_\circ\left(\frac{n}{2}\right)\right) + (n-1) \cdot C(\circ) \end{aligned}$$

Behauptung:

$$\begin{aligned} C(\text{PP}_\circ(n)) &= (2^{k+1} - 2) \cdot C(\circ) - k \cdot C(\circ) \\ &= 2 \cdot 2^k \cdot C(\circ) - 2 \cdot C(\circ) - k \cdot C(\circ) \\ &= 2n \cdot C(\circ) - 2 \cdot C(\circ) - \log_2 n \cdot C(\circ) \\ &= (2n - 2 - \log_2 n) \cdot C(\circ) \end{aligned}$$

Beweis:

Induktionsanfang $n = 2^0 = 1$:

$$\begin{aligned} C(\text{PP}_\circ(1)) &\stackrel{\text{Def}}{=} 0 \\ C(\text{PP}_\circ(1)) &\stackrel{\text{Beh}}{=} (2 \cdot 1 - 2 - \log_2 1) \cdot C(\circ) = 0 \cdot C(\circ) = 0 \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$C(\text{PP}_\circ(n)) = C\left(\text{PP}_\circ\left(\frac{n}{2}\right)\right) + (n-1) \cdot C(\circ)$$

Induktionsschritt $\frac{n}{2} \rightsquigarrow n$:

$$\begin{aligned} C(\text{PP}_\circ(n)) &\stackrel{\text{IV}}{=} C\left(\text{PP}_\circ\left(\frac{n}{2}\right)\right) + (n-1) \cdot C(\circ) \\ &\stackrel{\text{Beh}}{=} \left(2 \cdot \frac{n}{2} - 2 - \log_2 \frac{n}{2}\right) \cdot C(\circ) + (n-1) \cdot C(\circ) \\ &= (n - 2 - (\log_2 n - \log_2 2)) \cdot C(\circ) + (n-1) \cdot C(\circ) \\ &= (n - 2 - \log_2 n + 1) \cdot C(\circ) + (n-1) \cdot C(\circ) \\ &= (n - 1 - \log_2 n) \cdot C(\circ) + (n-1) \cdot C(\circ) \\ &= (2n - 2 - \log_2 n) \cdot C(\circ) \end{aligned}$$

□

(b) Sei $n = 2^k$. Somit ist $k = \log_2 n$.

$$\begin{aligned} D(\text{PP}_\circ(1)) &= 0 \\ D(\text{PP}_\circ(n)) &\leq D\left(\text{PP}_\circ\left(\frac{n}{2}\right)\right) + 2 \cdot D(\circ) \end{aligned}$$

Behauptung:

$$D(\text{PP}_\circ(n)) \leq 2 \cdot \log_2 n \cdot D(\circ)$$

Beweis: Induktionsanfang $n = 2^0 = 1$:

$$\begin{aligned} D(\text{PP}_\circ(1)) &\stackrel{\text{Def}}{=} 0 \\ D(\text{PP}_\circ(1)) &\stackrel{\text{Beh}}{\leq} 2 \cdot \log_2 1 \cdot D(\circ) = 2 \cdot 0 \cdot D(\circ) = 0 \\ D(\text{PP}_\circ(1)) &\stackrel{\text{Beh}}{=} 0 \quad \text{da} \quad D(\text{PP}_\circ(n)) \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$D(\text{PP}_\circ(n)) \leq D\left(\text{PP}_\circ\left(\frac{n}{2}\right)\right) + 2 \cdot D(\circ)$$

Induktionsschritt $\frac{n}{2} \rightsquigarrow n$:

$$\begin{aligned} D(\text{PP}_\circ(n)) &\stackrel{\text{IV}}{\leq} D\left(\text{PP}_\circ\left(\frac{n}{2}\right)\right) + 2 \cdot D(\circ) \\ &\stackrel{\text{Beh}}{\leq} 2 \cdot \log_2 \frac{n}{2} \cdot D(\circ) + 2 \cdot D(\circ) \\ &\leq 2 \cdot (\log_2 n - \log_2 2) \cdot D(\circ) + 2 \cdot D(\circ) \\ &\leq 2 \cdot (\log_2 n - 1) \cdot D(\circ) + 2 \cdot D(\circ) \\ &\leq (2 \cdot \log_2 n - 2 + 2) \cdot D(\circ) \\ &\leq 2 \cdot \log_2 n \cdot D(\circ) \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2

(a) Die Addition

$$\langle s \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle + c_{-1}$$

läßt sich zerlegen in

$$\begin{aligned} \langle c_{i-1}, s[i-1 : 0] \rangle &= \langle a[i-1 : 0] \rangle + \langle b[i-1 : 0] \rangle + c_{-1} \\ \langle c_n, s[n-1 : i] \rangle &= \langle a[n-1 : i] \rangle + \langle b[n-1 : i] \rangle + c_{i-1} \end{aligned}$$

Letztere läßt sich wiederum zerlegen in

$$\langle c_j, s[j : i] \rangle = \langle a[j : i] \rangle + \langle b[j : i] \rangle + c_{i-1} \quad (*)$$

$$\langle c_n, s[n-1 : j+1] \rangle = \langle a[n-1 : j+1] \rangle + \langle b[n-1 : j+1] \rangle + c_j$$

Vorausgesetzt sei

$$p_{j,i} = 1$$

Daraus folgt nach Definition

$$\langle a[j : i] \rangle + \langle b[j : i] \rangle = \langle 1^{j-i+1} \rangle$$

Einsetzen in (*) ergibt

$$\langle c_j, s[j : i] \rangle = \langle 1^{j-i+1} \rangle + c_{i-1}$$

$$c_j \cdot 2^{j-i+1} + \left(\sum_{k=i}^j s_k \cdot 2^{k-i} \right) = \left(\sum_{k=0}^{(j-i+1)-1} 2^k \right) + c_{i-1}$$

$$c_j \cdot 2^{j-i+1} + \left(\sum_{k=i}^j s_k \cdot 2^{k-i} \right) = (2^{j-i+1} - 1) + c_{i-1}$$

Unterscheide zwei mögliche Fälle für $c_{i-1} \in \{0, 1\}$.

- Sei zunächst $c_{i-1} = 0$. Dann gilt

$$c_j \cdot 2^{j-i+1} + \left(\sum_{k=i}^j s_k \cdot 2^{k-i} \right) = 2^{j-i+1} - 1$$

$$\iff c_j = 0 \wedge s_k = 1 \quad \forall k : i \leq k \leq j \quad \text{da } c_j, s_k \in \{0, 1\}$$

In diesem Fall gilt also $c_j = c_{i-1}$.

- Sei andererseits $c_{i-1} = 1$. Dann gilt

$$c_j \cdot 2^{j-i+1} + \left(\sum_{k=i}^j s_k \cdot 2^{k-i} \right) = 2^{j-i+1}$$

$$\iff c_j = 1 \wedge s_k = 0 \quad \forall k : i \leq k \leq j \quad \text{da } c_j, s_k \in \{0, 1\}$$

In diesem Fall gilt also ebenfalls $c_j = c_{i-1}$.

□

(b) Vorausgesetzt sei

$$g_{j,i} = 1$$

Daraus folgt nach Definition

$$\langle a[j : i] \rangle + \langle b[j : i] \rangle > \langle 1^{j-i+1} \rangle$$

Einsetzen in (*) aus Aufgabe 2a ergibt

$$\langle c_j, s[j : i] \rangle > \langle 1^{j-i+1} \rangle + c_{i-1}$$

$$c_j \cdot 2^{j-i+1} + \left(\sum_{k=i}^j s_k \cdot 2^{k-i} \right) > \left(\sum_{k=0}^{(j-i+1)-1} 2^k \right) + c_{i-1}$$

$$c_j \cdot 2^{j-i+1} + \left(\sum_{k=i}^j s_k \cdot 2^{k-i} \right) > (2^{j-i+1} - 1) + c_{i-1}$$

Da $c_{i-1} \in \{0, 1\}$ muss unabhängig von c_{i-1} in jedem Fall gelten

$$c_j \cdot 2^{j-i+1} + \left(\sum_{k=i}^j s_k \cdot 2^{k-i} \right) > 2^{j-i+1} - 1$$

$$c_j \cdot 2^{j-i+1} + \left(\sum_{k=i}^j s_k \cdot 2^{k-i} \right) \geq 2^{j-i+1}$$

$$\implies c_j = 1 \quad \text{da } c_j, s_k \in \{0, 1\}$$

□

(c) Siehe Schaltkreis 1 auf Seite 8.

(d) Siehe Schaltkreis 2 auf Seite 8.

(e) Seien

$$g_2 = g_{j,k}, \quad p_2 = p_{j,k}, \quad g_1 = g_{k-1,i}, \quad p_1 = p_{k-1,i} \quad \text{mit } i < k \leq j$$

Zu zeigen:

$$g_{j,i} = g_2 \vee (g_1 \wedge p_2)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} g_{j,i} &\stackrel{!}{=} g_2 \vee (g_1 \wedge p_2) \\ &= g_{j,k} \vee (g_{k-1,i} \wedge p_{j,k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{j,i} = 1 &\iff g_{j,k} = 1 \quad \vee \quad (g_{k-1,i} \wedge p_{j,k}) = 1 \\ &\iff g_{j,k} = 1 \quad \vee \quad (g_{k-1,i} = 1 \wedge p_{j,k} = 1) \\ &\iff \langle a[j:k] \rangle + \langle b[j:k] \rangle > \langle 1^{j-k+1} \rangle \quad \vee \\ &\quad \left(\langle a[k-1:i] \rangle + \langle b[k-1:i] \rangle > \langle 1^{k-i} \rangle \wedge \langle a[j:k] \rangle + \langle b[j:k] \rangle = \langle 1^{j-k+1} \rangle \right) \\ &\iff \langle a[j:k] \rangle + \langle b[j:k] \rangle > \langle 1^{j-k+1} \rangle \quad \vee \\ &\quad \left(\langle a[k-1:i] \rangle + \langle b[k-1:i] \rangle > \langle 1^{k-i} \rangle \wedge 2^{k-i} \cdot (\langle a[j:k] \rangle + \langle b[j:k] \rangle) = 2^{k-i} \cdot \langle 1^{j-k+1} \rangle \right) \\ &\iff \langle a[j:k] \rangle + \langle b[j:k] \rangle > \langle 1^{j-k+1} \rangle \quad \vee \\ &\quad \langle a[j:i] \rangle + \langle b[j:i] \rangle > \langle 1^{k-i} \rangle + 2^{k-i} \cdot \langle 1^{j-k+1} \rangle \\ &\iff \langle a[j:k] \rangle + \langle b[j:k] \rangle > \langle 1^{j-k+1} \rangle \quad \vee \\ &\quad \langle a[j:i] \rangle + \langle b[j:i] \rangle > \langle 1^{j-i+1} \rangle \\ &\stackrel{???}{\iff} \langle a[j:i] \rangle + \langle b[j:i] \rangle > \langle 1^{j-i+1} \rangle \quad \vee \\ &\quad \langle a[j:i] \rangle + \langle b[j:i] \rangle > \langle 1^{j-i+1} \rangle \\ &\iff \langle a[j:i] \rangle + \langle b[j:i] \rangle > \langle 1^{j-i+1} \rangle \\ &\iff g_{j,i} = 1 \end{aligned}$$

□

Zu zeigen:

$$p_{j,i} = p_2 \wedge p_1$$

Beweis:

$$\begin{aligned} p_{j,i} &\stackrel{!}{=} p_2 \wedge p_1 \\ &= p_{j,k} \wedge p_{k-1,i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{j,i} = 1 &\iff p_{j,k} = 1 \quad \wedge \quad p_{k-1,i} = 1 \\
&\iff \langle a[j : k] \rangle + \langle b[j : k] \rangle = \langle 1^{j-k+1} \rangle \quad \wedge \quad \langle a[k-1 : i] \rangle + \langle b[k-1 : i] \rangle = \langle 1^{k-i} \rangle \\
&\iff 2^{k-i} \cdot \langle a[j : k] \rangle + 2^{k-i} \cdot \langle b[j : k] \rangle = 2^{k-i} \cdot \langle 1^{j-k+1} \rangle \quad \wedge \\
&\quad \langle a[k-1 : i] \rangle + \langle b[k-1 : i] \rangle = \langle 1^{k-i} \rangle \\
&\iff 2^{k-i} \cdot \langle a[j : k] \rangle + \langle a[k-1 : i] \rangle + 2^{k-i} \cdot \langle b[j : k] \rangle + \langle b[k-1 : i] \rangle = \\
&\quad 2^{k-i} \cdot \langle 1^{j-k+1} \rangle + \langle 1^{k-i} \rangle \\
&\iff \langle a[j : i] \rangle + \langle b[j : i] \rangle = \langle 1^{j-k+1}, 0^{k-i} \rangle + \langle 1^{k-i} \rangle \\
&\iff \langle a[j : i] \rangle + \langle b[j : i] \rangle = \langle 1^{j-i+1} \rangle \\
&\iff p_{j,i} = 1
\end{aligned}$$

□

(f) Gegeben sei die Funktion

$$\circ : \{0, 1\}^2 \times \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}^2$$

$$(g_2, p_2) \circ (g_1, p_1) := (g_2 \vee (g_1 \wedge p_2), p_2 \wedge p_1)$$

Die Funktion $\circ$ so assoziativ sein, es muss also gelten

$$((a, b) \circ (c, d)) \circ (e, f) = (a, b) \circ ((c, d) \circ (e, f))$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
((a, b) \circ (c, d)) \circ (e, f) &= (a \vee (c \wedge b), b \wedge d) \circ (e, f) \\
&= ((a \vee (c \wedge b)) \vee (e \wedge (b \wedge d)), (b \wedge d) \wedge f) \\
&= ((a \vee (c \wedge b)) \vee (e \wedge (b \wedge d)), (b \wedge d) \wedge f) \\
&= ((a \vee (c \wedge b)) \vee (e \wedge (b \wedge d)), b \wedge d \wedge f) \\
&= ((a \vee (c \wedge b)) \vee (e \wedge (b \wedge d)), b \wedge (d \wedge f)) \\
&= (a \vee (c \wedge b) \vee (e \wedge d \wedge b), b \wedge (d \wedge f)) \\
&= (a \vee (c \wedge b) \vee ((e \wedge d) \wedge b), b \wedge (d \wedge f)) \\
&= (a \vee ((c \vee (e \wedge d)) \wedge b), b \wedge (d \wedge f)) \\
&= (a, b) \circ (c \vee (e \wedge d), d \wedge f) \\
&= (a, b) \circ ((c, d) \circ (e, f))
\end{aligned}$$

□

(g) **Zu zeigen:**

$$g_{i,0} = c_i \quad \text{für } 0 \leq i \leq n-1$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
g_{i,0} = 1 &\iff \langle a[i : 0] \rangle + \langle b[i : 0] \rangle + c_{-1} > \langle 1^{i+1} \rangle \\
&\iff \langle a[i : 0] \rangle + \langle b[i : 0] \rangle + c_{-1} \geq 2^{i+1} \\
\langle c_i, s[i : 0] \rangle &= \langle a[i : 0] \rangle + \langle b[i : 0] \rangle + c_{-1} \\
\langle c_i, s[i : 0] \rangle &\geq 2^{i+1} \\
&\iff c_i = 1 \quad \text{da } \max(s[i : 0]) = 2^{i+1} - 1
\end{aligned}$$

□

- (h) Seien alle Carrybits c_i der Addition $\langle s \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$ bekannt. Die Operation eines Volladdierers ist wie folgt definiert:

$$\langle c_i, s_i \rangle = a_i + b_i + c_{i-1}$$

Da vorausgesetzt ist, dass die Carrybits bereits bekannt sind, wollen wir c_i nicht erneut berechnen, sondern nur s_i . Somit setzen wir:

$$\langle s_i \rangle = a_i + b_i + c_{i-1} \mod 2$$

Das i -te Bit der Summe lässt sich somit trivialerweise durch den boole'schen Ausdruck

$$s_i = (a_i \oplus b_i) \oplus c_{i-1}$$

berechnen. Dieser Ausdruck lässt sich mit einem Schaltkreis der Tiefe 2 und Kosten 2 darstellen. Die Berechnung eines Summenbits ist offensichtlich nicht von der Berechnung der anderen Summenbits abhängig, so dass die Gesamtkosten für einen n -Bit-Addierer $2n$ betragen (das Bit s_n der $(n+1)$ Bit breiten Summe ist gleich dem letzten Carrybit c_{n-1} und nach Voraussetzung bereits bekannt) und die Gesamttiefe 2 ist. Beweis des obigen boole'schen Ausdrucks durch Wertetabelle:

c_{i-1}	a_i	b_i	$\langle c_i, s_i \rangle$	$\langle s_i \rangle$	$a_i \oplus b_i$	$(a_i \oplus b_i) \oplus c_{i-1}$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	2	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	2	0	1	0
1	1	0	2	0	1	0
1	1	1	3	1	0	1

□

- (i) Siehe Schaltkreis 3 auf Seite 9. Unterschaltkreise „2c“ und „2d“ wie in der entsprechenden Aufgabe deklariert. Unterschaltkreis „PP_o(n)“ wie auf dem 7. Übungsblatt deklariert.

- (j)

$$C(\text{CLA}_n) = 10n - 3 \log_2 n - 4$$

- (k)

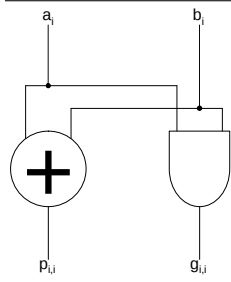
$$D(\text{CLA}_n) = 4 \log_2 n + 5$$

Aufgabe 3

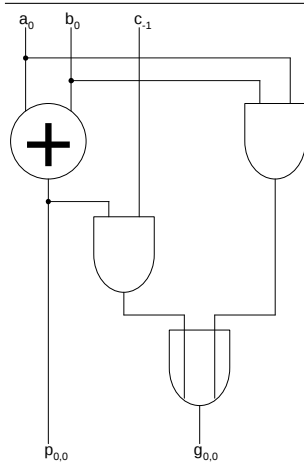
Aus der Konstruktion für Encoder und Decoder ergibt sich

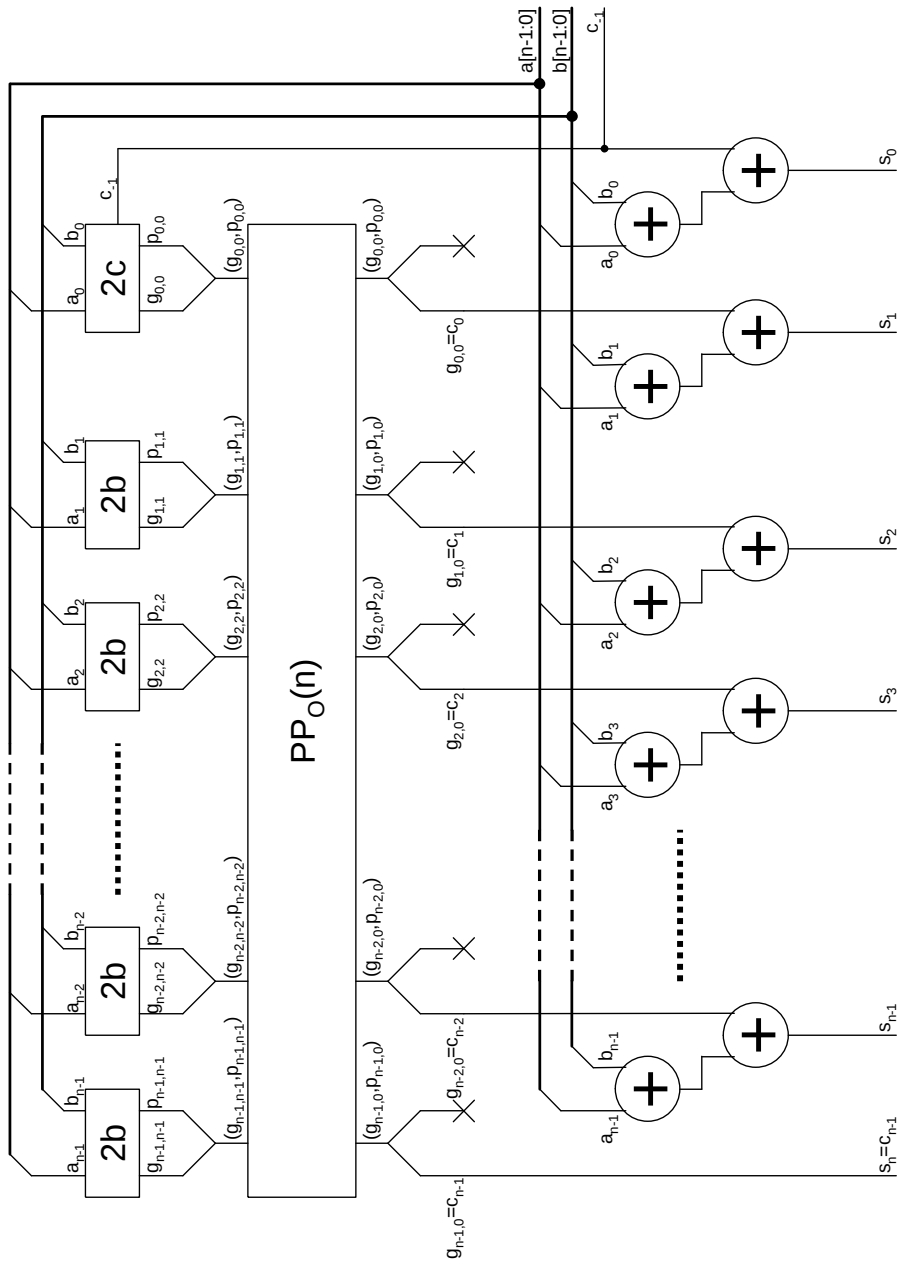
$$\begin{aligned} C(\text{Enc}_1) &= 0 & C(\text{Enc}_n) &= 2 \cdot C(\text{Enc}_{n-1}) + n \\ C(\text{Dec}_1) &= 1 & C(\text{Dec}_n) &= C(\text{Dec}_{n-1}) + 3 \end{aligned}$$

Schaltkreis 1 Aufgabe 2c



Schaltkreis 2 Aufgabe 2d





Da $x \in \{0, 1\}^{32}$ und $x_i = 1$ für genau ein $i \in \{0, \dots, 31\}$, benötigen wir einen $n = \log_2 32 = 5$ Bit Encoder und Decoder. Für die Kosten der beiden Schaltkreise ergibt sich

$$C(\text{Enc}_5) = 41$$

$$C(\text{Dec}_5) = 13$$

Die Kosten der Konstruktion mit Encoder und Decoder sollen geringer sein als die Kosten ohne. Ohne Encoder und Decoder werden exakt 32 Flipflops benötigt, mit jedoch nur $\log_2 32 = 5$ Flipflops. Es soll also gelten

$$\begin{aligned} 32 \cdot C(\text{FF}) &> C(\text{Enc}_5) + C(\text{Dec}_5) + 5 \cdot C(\text{FF}) \\ \iff 27 \cdot C(\text{FF}) &> C(\text{Enc}_5) + C(\text{Dec}_5) \\ \iff C(\text{FF}) &> \frac{C(\text{Enc}_5) + C(\text{Dec}_5)}{27} \\ \iff C(\text{FF}) &> \frac{41 + 13}{27} \\ \iff C(\text{FF}) &> \frac{54}{27} \\ \iff C(\text{FF}) &> 2 \end{aligned}$$

Die Kosten für ein Flipflop müssen größer 2 sein, damit sich diese Konstruktion lohnt, also die Gesamtkosten mittels dieser Konstruktion gesenkt werden können. Sind die Kosten für ein Flipflop gleich 2, bleiben die Gesamtkosten gleich.