

Übungsblatt 6

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)

Carsten Saar (Matrikelnummer 2030107)

Thomas Ospelt (Matrikelnummer 2029959)

Timo Adam (Matrikelnummer 2031946)

Übungsgruppe 8 - Di, 15-17 Uhr

Steffen Heil

Aufgabe 1

siehe Anhang (Zeichnung)

Aufgabe 2

siehe Anhang (Zeichnung)

Aufgabe 4

siehe Anhang (Zeichnung)

Aufgabe 5

Wir haben bereits in der Vorlesung bewiesen, dass es zu jeder Schaltfunktion f einen boole'schen Ausdruck $e \in \text{BA}$ gibt, der f berechnet. Vollständig geklammerte boole'sche Ausdrücke sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} V &= \{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{endliche Menge von Variablen} \\ B_1 &= \{0, 1\} \cup V \\ \forall e_1, e_2 \in B_i \quad & \begin{aligned} e_1 &\in B_{i+1} \\ (e_1 \wedge e_2) &\in B_{i+1} \quad \text{Und} \\ (e_1 \vee e_2) &\in B_{i+1} \quad \text{Oder} \\ (e_1 \oplus e_2) &\in B_{i+1} \quad \text{Addition modulo 2} \\ (\sim e_1) &\in B_{i+1} \quad \text{Negierung} \end{aligned} \\ \text{BA} &= \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \end{aligned}$$

Zu zeigen: Es ist möglich jede Schaltfunktion f durch einen boole'schen Ausdruck $e \in \text{BA}'$ zu berechnen, der nur aus NAND-Gattern besteht.

Beweis: Dass es einen boole'schen Ausdruck $e \in \text{BA}$ gibt, der die Funktion f berechnet, ist bereits gezeigt. Es genügt also zu zeigen, dass es möglich ist, jeden boole'schen Ausdruck $e \in \text{BA}$ nur durch NAND-Gatter zu berechnen.

$$\begin{aligned} (e_1 \wedge e_2) &\equiv ((e_1 \bar{\wedge} e_2) \bar{\wedge} (e_1 \bar{\wedge} e_2)) \\ (e_1 \vee e_2) &\equiv ((e_1 \bar{\wedge} e_1) \bar{\wedge} (e_2 \bar{\wedge} e_2)) \\ (e_1 \oplus e_2) &\equiv (e_3 \bar{\wedge} e_3) \text{ mit } e_3 := (((e_1 \bar{\wedge} e_1) \bar{\wedge} (e_2 \bar{\wedge} e_2)) \bar{\wedge} (e_1 \bar{\wedge} e_2)) \\ (\sim e_1) &\equiv (e_1 \bar{\wedge} e_1) \end{aligned}$$

Zeigen durch Wertetabellen, dass oben genannte Äquivalenzen gelten.

e_1	e_2	$e_1 \bar{\wedge} e_2$	$(e_1 \bar{\wedge} e_2) \bar{\wedge} (e_1 \bar{\wedge} e_2)$	$e_1 \wedge e_2$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1

e_1	e_2	$e_1 \bar{\wedge} e_1$	$e_2 \bar{\wedge} e_2$	$(e_1 \bar{\wedge} e_1) \bar{\wedge} (e_2 \bar{\wedge} e_2)$	$e_1 \vee e_2$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1

e_1	e_2	$e_1 \bar{\wedge} e_1$	$e_2 \bar{\wedge} e_2$	$(e_1 \bar{\wedge} e_1) \bar{\wedge} (e_2 \bar{\wedge} e_2)$	$e_1 \bar{\wedge} e_2$	e_3	$e_3 \bar{\wedge} e_3$
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	0

e_1	$e_1 \bar{\wedge} e_1$	$\sim e_1$
0	1	1
1	0	0

Definiere boole'sche Ausdrücke ausschließlich über NAND-Gatter in BA'

$$\begin{aligned}
V &= \{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{endliche Menge von Variablen} \\
B_1 &= \{0, 1\} \cup V \\
\forall e_1, e_2 \in B_i \quad & \begin{aligned} &e_1 \in B_{i+1} \\ &((e_1 \bar{\wedge} e_2) \bar{\wedge} (e_1 \bar{\wedge} e_2)) \in B_{i+1} \quad \text{Und} \\ &((e_1 \bar{\wedge} e_1) \bar{\wedge} (e_2 \bar{\wedge} e_2)) \in B_{i+1} \quad \text{Oder} \\ &(e_3 \bar{\wedge} e_3) \in B_{i+1} \text{ mit } e_3 := (((e_1 \bar{\wedge} e_1) \bar{\wedge} (e_2 \bar{\wedge} e_2)) \bar{\wedge} (e_1 \bar{\wedge} e_2)) \quad \text{Addition modulo 2} \\ &(e_1 \bar{\wedge} e_1) \in B_{i+1} \quad \text{Negierung} \end{aligned} \\
BA' &= \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i
\end{aligned}$$

Da die oben genannten Äquivalenzen gelten, ist es folglich möglich jede Schaltfunktion f durch einen boole'schen Ausdruck $e \in BA'$ zu berechnen. $\square$

Aufgabe 6

(a) **Zu zeigen:**

$$\langle x^t \rangle + \langle y^t \rangle = \langle x^0 \rangle + \langle y^0 \rangle \quad \forall t \geq 0$$

Induktionsanfang $t = 0$: gilt trivialerweise

$$\langle x^0 \rangle + \langle y^0 \rangle = \langle x^0 \rangle + \langle y^0 \rangle$$

Induktionsschritt $t \rightsquigarrow t+1$: Aus der Konstruktion des von-Neumann-Addierers und des Halbaddierers ergibt sich

$$\begin{aligned}
x_i^{t+1} &= u_i^t = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0 \\ x_{i-1}^t \wedge y_{i-1}^t & \text{für } i > 0 \end{cases} \\
y_i^{t+1} &= s_i^t = x_i^t \oplus y_i^t
\end{aligned}$$

Betrachtet man die Summe zum Zeitpunkt $t + 1$ erhält man

$$\begin{aligned}
\langle x^{t+1} \rangle + \langle y^{t+1} \rangle &= \left[\sum_{i=1}^n (x_{i-1}^t \wedge y_{i-1}^t) \cdot 2^i \right] + \left[\sum_{i=0}^n (x_i^t \oplus y_i^t) \cdot 2^i \right] \\
&= \left[\sum_{i=0}^{n-1} (x_i^t \wedge y_i^t) \cdot 2^{i+1} \right] + \left[\sum_{i=0}^n (x_i^t \oplus y_i^t) \cdot 2^i \right] \\
&= \left[\sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(2 \cdot (x_i^t \wedge y_i^t) + (x_i^t \oplus y_i^t))}_{x_i^t + y_i^t \text{ nach Def. HA}} \cdot 2^i \right] + (x_n^t \oplus y_n^t) \cdot 2^n \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1} (x_i^t + y_i^t) \cdot 2^i \right) + (x_n^t \oplus y_n^t) \cdot 2^n \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i^t \cdot 2^i \right) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} y_i^t \cdot 2^i \right) + (x_n^t \oplus y_n^t) \cdot 2^n \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i^t \cdot 2^i \right) + \left(\sum_{i=0}^{n-1} y_i^t \cdot 2^i \right) + \underbrace{(x_n^t \oplus y_n^t) \cdot 2^n + 2 \cdot (x_n^t \wedge y_n^t) \cdot 2^n}_{(x_n^t + y_n^t) \cdot 2^n} \mod 2^{n+1} \\
&= \left(\sum_{i=0}^n x_i^t \cdot 2^i \right) + \left(\sum_{i=0}^n y_i^t \cdot 2^i \right) \mod 2^{n+1} \\
&= \langle x^t \rangle + \langle y^t \rangle \mod 2^{n+1}
\end{aligned}$$

□

(b) **Zu zeigen:**

$$\exists t \leq n + 1 : \quad \langle y^t \rangle = \langle x^0 \rangle + \langle y^0 \rangle$$

Beweis:

Wir haben bereits gezeigt

$$\langle x^t \rangle + \langle y^t \rangle = \langle x^0 \rangle + \langle y^0 \rangle \quad \forall t \geq 0$$

Soll zu einem bestimmten Zeitpunkt t' das Register $\langle y^{t'} \rangle$ die Summe enthalten, muss gelten

$$\begin{aligned}
&\langle y^{t'} \rangle = \langle x^0 \rangle + \langle y^0 \rangle & (1) \\
\text{und } &\langle x^{t'} \rangle + \langle y^{t'} \rangle = \langle x^0 \rangle + \langle y^0 \rangle & (2) \\
\implies &\langle x^{t'} \rangle = 0 & (2) - (1)
\end{aligned}$$

Untersuche nun, ob es einen Zeitpunkt t' gibt, ab dem $\langle x^{t'} \rangle$ unabhängig von den Startwerten $\langle x^0 \rangle$ und $\langle y^0 \rangle$ gleich 0 wird. $\langle x^{t'} \rangle = 0$ gilt genau dann, wenn $x_i^{t'} = 0 \forall i$. Da nach Konstruktion

$$x_i^{t'+1} = \begin{cases} 0 & \text{für } i = 0 \\ x_{i-1}^{t'} \wedge y_{i-1}^{t'} & \text{für } i > 0 \end{cases}$$

gilt, wird offensichtlich in jedem Durchlauf das 0-te Bit auf 0 gesetzt. Das i -te Bit des neuen x ist gleich dem Ergebnis einer Und-Verknüpfung der $(i - 1)$ -ten

Bits der alten x und y aus dem letzten Taktzyklus. Daraus läßt sich folgern

$$\begin{aligned}
& x_0^1 = 0 \\
\Rightarrow & x_0^t = 0 \quad \forall t \geq 1 \\
& x_1^2 = x_0^1 \wedge y_0^1 = 0 \\
\Rightarrow & x_1^t = 0 \quad \forall t \geq 2 \\
& x_2^3 = x_1^2 \wedge y_1^2 = 0 \\
\Rightarrow & x_2^t = 0 \quad \forall t \geq 3 \\
& \vdots \\
& x_{n-1}^n = x_{n-2}^{n-1} \wedge y_{n-2}^{n-1} = 0 \\
\Rightarrow & x_{n-1}^t = 0 \quad \forall t \geq n \\
& x_n^{n+1} = x_{n-1}^n \wedge y_{n-1}^n = 0 \\
\Rightarrow & x_n^t = 0 \quad \forall t \geq n+1
\end{aligned}$$

Das heißt, dass spätestens ab dem Taktzyklus $t' = n+1$ alle Bits $x_i^{t'} = x_i^{n+1} = 0$ und somit $\langle x^{t'} \rangle = \langle x^{n+1} \rangle = 0$ unabhängig von den Startwerten $\langle x^0 \rangle$ und $\langle y^0 \rangle$. Somit enthält das Register y nach obiger Vorbetrachtung spätestens ab dem $(n-1)$ -ten Taktzyklus die Summe von $\langle x^0 \rangle + \langle y^0 \rangle$. $\square$

(c)

$$\begin{aligned}
& x_i^0 = 1 \quad \forall i \geq 0 \quad \wedge \quad y_0^0 = 1 \quad \wedge \quad y_i^0 = 0 \quad \forall i \geq 1 \\
\iff & \langle x^0 \rangle = 2^n - 1 \quad \wedge \quad \langle y^0 \rangle = 1
\end{aligned}$$