

Übungsblatt 4

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)

Carsten Saar (Matrikelnummer 2030107)

Thomas Ospelt (Matrikelnummer 2029959)

Timo Adam (Matrikelnummer 2031946)

Übungsgruppe 8 - Di, 15-17 Uhr

Steffen Heil

Aufgabe 1

zu zeigen: $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$. Benutzt wird dabei

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 && \text{entspricht Vor. 12} \\ a^{i+1} &= a^i \cdot a && \text{entspricht Vor. 13} \end{aligned}$$

sowie die bereits bewiesenen Rechenregeln.

Beweis durch vollständige Induktion über $c \in \mathbb{N}$:

1. Induktionsanfang:

(a) $c = 0$:

$$\begin{aligned} (a^b)^0 &= a^{b \cdot 0} \\ \text{Setze: } a^b &= z \\ z^0 &= a^0 \\ 1 &= 1 \text{ (w)} \end{aligned}$$

(b) $c = 1$:

$$(a^b)^1 = a^b = a^{b \cdot 1} = a^{b \cdot c}$$

2. (a) Induktionsannahme: Es gilt $\forall c \in \mathbb{N}$: $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$

(b) Induktionsbehauptung: Dann gilt $\forall (c+1) \in \mathbb{N}$: $(a^b)^{c+1} = a^{b \cdot (c+1)}$

(c) Induktionsbegründung: Benutze dabei $(a^b) = z$ (*)

$$\begin{aligned} (a^b)^{c+1} &\stackrel{(*)}{=} z^{c+1} \\ &= z^c \cdot z \\ &\stackrel{(*)}{=} (a^b)^c \cdot (a^b) \\ &\stackrel{(2a)}{=} (a^{b \cdot c}) \cdot (a^b) \\ &= (a^{(b \cdot c)}) \cdot (a^b) \\ &\stackrel{\text{Vor. 18}}{=} a^{(b \cdot c) + b} \\ &= a^{b(c+1)} \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2

(a)

$$\begin{aligned} \langle a, 0^i \rangle &= \sum_{j=i}^{n-1} a_j \cdot 2^j + \sum_{j=0}^{i-1} 0_j \cdot 2^j \\ &= \sum_{j=i}^{n-1} a_j \cdot 2^j + 0 \\ &= \sum_{j=i}^{n-1} a_j \cdot 2^j \\ &= \langle a \rangle \cdot 2^i \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\langle 0^j, a \rangle &= \sum_{i=l}^j 0_i \cdot 2^i + \sum_{i=0}^{l-1} a_i \cdot 2^i \\ &= 0 + \sum_{i=0}^{l-1} a_i \cdot 2^i \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} a_i \cdot 2^i \\ &= \langle a \rangle\end{aligned}$$

Aufgabe 3

siehe hinten

Aufgabe 4

$$\begin{aligned}D(Tree_b) &= D(Tree_{\frac{b}{2}}) + 6 \\ D(Tree_{\frac{b}{2}}) &= D(Tree_{\frac{b}{4}}) + 6 + 6 \\ D(Tree_{\frac{b}{4}}) &= D(Tree_{\frac{b}{8}}) + 6 + 6 + 6 \\ &\vdots \\ \Rightarrow D(Tree_b) &= D(Tree_{\frac{b}{2^K}}) + K \cdot 6\end{aligned}$$

Aus $D(Tree_4) = 6$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\left(\frac{b}{2^K}\right) &= 4 \\ b &= 2^{(K+2)} \\ \log(b) &= K + 2 \\ K &= \log(b) - 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(Tree_b) &= D(Tree_4) + (\log(b) - 2) \cdot 6 \\ D(Tree_b) &= -6 + 6 \cdot \log(b)\end{aligned}$$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $b = 4$

$$D(Tree_4) = -6 + 6 \cdot \log(4) = -6 + 6 \cdot 2 = 6 \quad (ok)$$

2. Fall: $b > 4$

$$\begin{aligned}D(Tree_b) &= D(Tree_{\frac{b}{2}}) + 6 \\ &= -6 + 6 \cdot (\log(b) - 1) + 6 \\ &= -6 + 6 \cdot \log(b) - 6 + 6 \\ &= -6 + 6 \cdot \log(b)\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Zu zeigen: Es existiert genau ein $x' \in \{a, \dots, a+k-1\}$ mit $x \equiv x' \pmod k$

Beweis: Seien $a, x \in \mathbb{Z}$ beliebig, $k \in \mathbb{N}^*$ beliebig.

Betrachte $x - a$:

1. Fall: $x - a \geq 0$

$x - a$ lässt bei Division durch $k \in \mathbb{N}^*$ einen eindeutig bestimmten Rest $r \in \{0, \dots, k-1\}$. Somit besitzt $x - a$ eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form:

$$\begin{aligned} x - a &= n \cdot k + r \quad \text{mit } n \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq r \leq k-1 \quad (I) \\ \Rightarrow x &= (a + r) + n \cdot k \\ \Leftrightarrow x &\equiv (a + r) \pmod k \end{aligned}$$

Setzt man $x' := a + r$, so ist $x \equiv x' \pmod k$.

Weiterhin gilt:

(1)

Aus (I) folgt: $a \leq a + r \leq a + k - 1$ und somit $a \leq x' \leq a + k - 1$, d.h. $x' \in \{a, \dots, a + k - 1\}$

(2)

Da $r \in \{0, \dots, k-1\}$ eindeutig bestimmt ist $\Rightarrow a + r = x'$ ist eindeutig bestimmt.

2. Fall: $x - a < 0 \Leftrightarrow -(x - a) > 0$

$-(x - a)$ lässt bei Division durch $k \in \mathbb{N}^*$ einen eindeutig bestimmten Rest $r' \in \{0, \dots, k-1\}$. Somit besitzt $-(x - a)$ eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form:

$$\begin{aligned} -(x - a) &= m \cdot k + r' \quad \text{mit } m \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq r' \leq k-1 \\ \Leftrightarrow x - a &= (-m) \cdot k + (-r') \Leftrightarrow x = (a - r') + (-m) \cdot k \quad (*) \end{aligned}$$

(a) $r' = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= a + (-m) \cdot k \\ \Leftrightarrow x &\equiv a \pmod k \end{aligned}$$

Setze $x' = a \Rightarrow x \equiv x' \pmod k$. Dann ist $x' = a \in \{a, \dots, a + k - 1\}$ und $x' = a$ ist eindeutig bestimmt.

(b) Sei nun $0 < r' \leq k-1 \Leftrightarrow 1 \leq r' \leq k-1 \quad (**)$

Aus (*) folgt: $x \equiv (a - r') \pmod k \Leftrightarrow x \equiv (a - r' + k) \pmod k$

Setze $x' := a - r' + k \Rightarrow x \equiv x' \pmod k$

$$\begin{aligned} (**) &\Leftrightarrow -1 \geq -r' \geq 1 - k \\ &\Leftrightarrow a + k - 1 \geq a + k - r' \geq 1 + a \\ &\Leftrightarrow a + 1 \leq a - r' + k \leq a + k - 1 \\ &\Leftrightarrow a + 1 \leq x' \leq a + k - 1 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow x' \in \{a+1, \dots, a+k-1\} \subset \{a, \dots, a+k-1\}$, d.h. $x' \in \{a, \dots, a+k-1\}$.

Außerdem ist $r' \in \{1, \dots, k-1\}$ (vgl. (**)) eindeutig bestimmt

$\Rightarrow a - r' + k = x'$ eindeutig bestimmt.

Aufgabe 6

Vorbemerkung:

Wir bezeichnen für $c \in \{0, 2^{n-1} - 1\}$ die eindeutige Zeichenreihe $a \in \{0, 1\}^n$ mit $\langle a \rangle = c$ mit

$$a = \text{bin}_n(c)$$

Beweis: Sei $c \in \{-2^{n-1}, \dots, 2^{n-1} - 1\}$.

Ist $c \geq 0$, so liegt $\text{bin}_n(c)$ in $\{0, 1\}^{n-1}$. Für $a = (0, \text{bin}_n(c))$ gilt dann

$$[a] = 0 + \langle \text{bin}_n(c) \rangle = c$$

Ist $c < 0$, so liegt c in $\{-2^{n-1}, \dots, -1\}$. Also gilt:

$$c = -2^{n-1} + c'$$

für ein $c' \in \{0, \dots, 2^{n-1} - 1\}$, es folgt $\text{bin}_n(c') \in \{0, 1\}^{n-1}$. Für $a = (1, \text{bin}_n(c'))$ gilt dann

$$[a] = -2^{n-1} + \langle \text{bin}_n(c') \rangle = c$$

Also ist die Funktion

$$[\] : \{0, 1\}^n \rightarrow \{-2^{n-1}, \dots, 2^{n-1} - 1\}$$

surjektiv. Da Definitionsbereich und Wertebereich der Funktion beide die Mächtigkeit 2^n haben, ist die Funktion auch injektiv. Somit ist gezeigt, dass die Funktion bijektiv ist. $\square$

Aufgabe 7

$$\begin{aligned} C(\text{CSA}_n) &= 3 \cdot C(\text{CSA}_{\frac{n}{2}}) + 4 \cdot \frac{n}{2} \\ C(\text{CSA}_{\frac{n}{2}}) &= 3 \cdot 3 \cdot C(\text{CSA}_{\frac{n}{4}}) + 4 \cdot \frac{n}{2} + 3 \cdot \left(4 \cdot \frac{n}{2^2}\right) \\ &\vdots \\ C(\text{CSA}_{\frac{n}{K}}) &= 3^K \cdot C(\text{CSA}_{\frac{n}{2^K}}) + \sum_{i=0}^{K-1} 3^i \left(\frac{2n}{2^i}\right) \end{aligned}$$

Für $K = \log(n)$ erhält man eine geschlossene Formel:

$$\begin{aligned} C(\text{CSA}_{\frac{n}{\log(n)}}) &= 3^{\log(n)} \cdot 3 + \sum_{i=0}^{\log(n)-1} 3^i \left(\frac{2n}{2^i}\right) \\ &= 3^{\log(n)} \cdot 3 + 2n \cdot \sum_{i=0}^{\log(n)-1} \left(\frac{3}{2}\right)^i \\ &= 3^{\log(n)} \cdot 3 + 2n \cdot \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{\log(n)} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right) - 1}\right) \\ &= 3^{\log(n)} \cdot 3 + 4n \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\log(n)} - 1\right) \end{aligned}$$