

Übungsblatt 3

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)

Carsten Saar (Matrikelnummer 2030107)

Thomas Ospelt (Matrikelnummer 2029959)

Übungsgruppe 8 - Di, 15-17 Uhr

Steffen Heil

Aufgabe 1

(a)

Die Knoten in eine Knotenliste einlesen und dem 1. Knoten den „Namen“ 0 geben, dem 2. Knoten den „Namen“ 1 geben bis der letzte, n. Knoten, den „Namen“ n-1 bekommt;

Dazu die Kanten merken;

Liste Sortierteliste = nil; While (Suche jeweils einen Knoten mit dem $\text{ingrad}(0) = \text{true}$)

// Suche nach Quellen

```
{
Sortierteliste = Knoten @ Sortierteliste;
Entferne diesen Knoten aus der Knotenliste;
Entferne die von diesem Knoten ausgehenden Kanten;
}
Ausgabe(Sortierteliste);
```

(b)

1.

Beweis der Bedingung, dass eine Sortierung von G eine injektive Funktion $s : V \rightarrow \mathbb{N}$ ist:

Gleich beim Einlesen wird jedem Knoten ein Wert $\in \mathbb{N}$ (bzw. „Namen“) zugeordnet. Somit ist die Funktion s injektiv. $\square$

2.

Beweis, dass $\forall (u, v) \in E$ gilt: $s(u) < s(v)$:

Wenn man immer wieder die Quellen mit deren zugehörigen Kanten „auswischt“, kann es beim DAG nie passieren, dass $s(u) < s(v)$ nicht zutrifft. Die Quelle ist immer das jeweilige $s(u)$, da $\text{ingrad}(u) = 0$. $\square$

3.

Beweis der Terminierung des Algorithmus:

Jeder endliche DAG hat nur endlich viele Knoten n. Wenn man bei jedem Schritt einen Knoten wegnimmt, so gilt immer $n > n - 1$. Die Gefahr, dass der Algorithmus scheitert, weil man auf einmal noch Knoten hat und keiner dieser mehr eine Quelle ist, ist nicht möglich, da ein DAG immer mindestens eine Quelle hat und jedesmal, wenn eine Quelle und ihre Kanten entfernt werden es mindestens einen anderen Knoten gibt, der eine Quelle ist. $\square$

Aufgabe 2

Beweis durch Widerspruch

Annahme: Jeder DAG hat eine Tiefe

Wähle nun einen Graphen, der eine Quelle und sonst nur Knoten mit $\text{ingrad} = 1$ und $\text{outgrad} = 1$ - somit auch keine Senke - hat (Ein Zyklus kommt laut Def. des DAG nicht vor). Dann hätte der Graph laut Annahme eine (bestimmbare) Tiefe. Da der Pfad von der Quelle durch den Graphen unendlich ist, kann man seine Tiefe nicht bestimmen. $\rightarrow$ Widerspruch $\square$

Aufgabe 3

1. Vor.: $a^0 = 1$
2. Vor.: $a^{i+1} = a^i$

(a)

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$

$$\begin{aligned}
 a^{n+m} &= a^{(n+m-1)+1} \\
 &\stackrel{\text{Vor. 2}}{=} a^{(n+m-1)} \cdot a \\
 &= a^{n+m-1-1+1} \cdot a \\
 &= a^{n+m-2+1} \cdot a \\
 &= a^{(n+m-2)+1} \cdot a \\
 &\stackrel{\text{Vor. 2}}{=} a^{(n+m-2)} \cdot a \cdot a \\
 &= a^{(n+m-2)+1} \cdot a^1 \cdot a \\
 &= a^{(n+m-2)} \cdot a^2 \\
 &\vdots \quad \text{solange fortführen bis} \\
 &= a^{n+m-m} \cdot a^m \\
 &= a^{n+0} \cdot a^m \\
 &= a^n \cdot a^m
 \end{aligned}$$

□

(b)

Zu zeigen: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ Beweis durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

1. Induktionsanfang: $n = 0$:

$$\underbrace{(a \cdot b)^0}_{=z} \stackrel{z^0=1}{=} 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0$$

2. (a) Induktionsannahme: Es gilt $\forall n \in \mathbb{N}: (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- (b) Induktionsbehauptung:
Dann gilt auch für $(n+1) \in \mathbb{N}: (a \cdot b)^{n+1} = a^{n+1} \cdot b^{n+1}$
- (c) Induktionsbegründung:

$$\begin{aligned}
 (a \cdot b)^{n+1} &\stackrel{\text{Vor. 2}}{=} (a \cdot b)^n \cdot (a \cdot b) \\
 &\stackrel{(2a)}{=} a^n \cdot b^n \cdot a \cdot b = a^n \cdot a \cdot b^n \cdot b \\
 &\stackrel{\text{Teil (a)}}{=} a^{n+1} \cdot b^{n+1}
 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 4

Zu Zeigen: $\sum_{i=0}^{n-1} (B-1) \cdot B^i = B^n - 1$.

Beweis durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

1. Induktionsanfang: $n = 0$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (B-1) \cdot B^i = \sum_{i=0}^{-1} (B-1) \cdot B^i = 0 \cdot B^i = 0 = 1 - 1 = B^0 - 1$$

2. (a) Induktionsannahme: Es gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n-1} (B-1) \cdot B^i = B^n - 1$

(b) Induktionsbehauptung: Dann gilt $\forall (n+1) \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^n (B-1) \cdot B^i = B^{n+1} - 1$$

(c) Induktionsbegründung:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (B-1) \cdot B^i &= \sum_{i=0}^{(n-1)+1} (B-1) \cdot B^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (B-1) \cdot B^i + (B-1) \cdot B^n \\ &\stackrel{(2a)}{=} B^n - 1 + (B-1) \cdot B^n \\ &= B^n - 1 + B \cdot B^n - B^n \\ &= -1 + B^n \\ &= B^n - 1 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 5

Zu zeigen: $\langle a[n-1:0] \rangle_B = B^h \cdot \langle a[n-1:h] \rangle_B + \langle a[h-1:0] \rangle_B$

$$\begin{aligned} B^h \cdot \langle a[n-1:h] \rangle_B + \langle a[h-1:0] \rangle_B &= B^h \cdot \sum_{i=h}^{n-1} a_i \cdot B^{i-h} + \sum_{i=0}^{h-1} a_i \cdot B^i \\ &= B^h \cdot \sum_{i=h}^{n-1} a_i \cdot \frac{B^i}{B^h} + \sum_{i=0}^{h-1} a_i \cdot B^i \\ &= \sum_{i=h}^{n-1} a_i \cdot B^i + \sum_{i=0}^{h-1} a_i \cdot B^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot B^i \\ &= \langle a[n-1:0] \rangle_B \end{aligned}$$

□

Aufgabe 6

Sei $B \in \mathbb{N}$; $B \geq 2$; $a_i, b_i, c_i, s_i \in \{0, \dots, B-1\} \quad \forall 0 \leq i \leq n-1$; $c_{-1} \in \{0, 1\}$;

$\langle c_i s_i \rangle_B = a_i + b_i + c_{i-1}$ (Vor.)

Zu zeigen: $\langle c_{n-1} s[n-1:0] \rangle_B = \langle a[n-1:0] \rangle_B + \langle b[n-1:0] \rangle_B + c_{-1}$

Beweis durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

1. Induktionsanfang: $n = 0$

$$\begin{aligned}
 \langle a[n-1:0] \rangle_B + \langle b[n-1:0] \rangle_B + c_{-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot B^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot B^i + c_{-1} \\
 &= \sum_{i=0}^{-1} a_i \cdot B^i + \sum_{i=0}^{-1} b_i \cdot B^i + c_{-1} \\
 &= 0 + 0 + c_{-1} \\
 &= \langle a \rangle_B + \langle b \rangle_B + c_{-1} \\
 &\stackrel{\text{lt. Vorl.}}{=} \langle c_{n-1} s[n-1:0] \rangle_B
 \end{aligned}$$

Die Voraussetzung ist auch erfüllt:

$$\langle c_0 s_0 \rangle = a_0 + b_0 + c_{-1}$$

2. (a) Induktionsannahme: Es gelte $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\langle c_{n-1} s[n-1:0] \rangle_B = \langle a[n-1:0] \rangle_B + \langle b[n-1:0] \rangle_B + c_{-1}$$

(b) Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $\forall (n+1) \in \mathbb{N}$:

$$\langle c_n s[n:0] \rangle_B = \langle a[n:0] \rangle_B + \langle b[n:0] \rangle_B + c_{-1}$$

(c) Induktionsbegründung:

$$\begin{aligned}
 \langle c_n s[n:0] \rangle_B &= c_n \cdot B^{n+1} + s_n \cdot B^n + \langle s[n-1:0] \rangle_B \\
 &= B \cdot c_n \cdot B^n + s_n \cdot B^n + \langle s[n-1:0] \rangle_B \\
 &= \langle c_n s_n \rangle_B \cdot B^n + \langle s[n-1:0] \rangle_B \\
 &= (a_n + b_n + c_{n-1}) \cdot B^n + \langle s[n-1:0] \rangle_B \\
 &= (a_n + b_n) \cdot B^n + c_{n-1} \cdot B^n + \langle s[n-1:0] \rangle_B \\
 &= c_{n-1} \cdot B^n + \langle s[n-1:0] \rangle_B + (a_n + b_n) \cdot B^n \\
 &= \langle c_{n-1} s[n-1:0] \rangle_B + a_n \cdot B^n + b_n \cdot B^n \\
 &\stackrel{(2a)}{=} \langle a[n-1:0] \rangle_B + \langle b[n-1:0] \rangle_B + c_{-1} + a_n \cdot B^n + b_n \cdot B^n \\
 &= \langle a[n-1:0] \rangle_B + a_n \cdot B^n + \langle b[n-1:0] \rangle_B + b_n \cdot B^n + c_{-1} \\
 &\stackrel{(*)}{=} \langle a[n:0] \rangle_B + \langle b[n:0] \rangle_B + c_{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (*) \quad \langle a[n:0] \rangle_B &= \sum_{i=0}^n a_i \cdot B^i = a_n \cdot B^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot B^i \\
 &= a_n \cdot B^n + \langle a[n-1:0] \rangle_B
 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 7

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main (int argc, char** argv)
{
    int z;
    cout << "Dezimalzahl eingeben" << endl;
    cin >> z;

    do
    {
        z=z/2;
        cout << z/2 << " "; // die " " sind nur für die Übersicht
    }
    while (z>0);
}
```

Formel:

$x = \text{Dezimalzahl}$

Zuerst bestimmt man $n = \min\{t \mid x < 2^t - 1\}$

$\langle \rangle^{-1} : \{0, \dots, 2^n - 1\} \rightarrow \{0, 1\}^n, x \mapsto \langle a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 \rangle$ mit $a_i = (\lfloor \frac{x}{2^i} \rfloor) \bmod 2$