

Übungsblatt 2

Jan Hendrik Dithmar (Matrikelnummer 2031259)

Carsten Saar (Matrikelnummer 2030107)

Thomas Ospelt (Matrikelnummer 2029959)

Übungsgruppe 8 - Di, 15-17 Uhr

Steffen Heil

Aufgabe 1

$a, b \in \mathbb{N}$.

Beweis durch vollständige Induktion über $b \in \mathbb{N}$:

Sei $a \in \mathbb{N}$ beliebig.

1. Induktionsanfang: $b = 0$
 $a + b = a + 0 = a = 0 + a = b + a$ (ok)
2. (a) Induktionsannahme: Für $b \in \mathbb{N}$ gelte: $a + b = b + a$
 (b) Induktionsbehauptung: Dann gilt für $b + 1 \in \mathbb{N}$: $a + (b + 1) = (b + 1) + a$
 (c) Induktionsbegründung:

$$\begin{aligned}
 a + (b + 1) &\stackrel{n.Vor.A1}{=} (a + b) + 1 \\
 &\stackrel{(2a)}{=} (b + a) + 1 \\
 &= b + (a + 1) \\
 &\stackrel{(2a)}{=} b + (1 + a) \\
 &= (b + 1) + a
 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2

Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Beweis durch vollständige Induktion über $c \in \mathbb{N}$:

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ beliebig.

1. Induktionsanfang: $c = 0$
 $a \cdot (b + c) = a \cdot (b + 0) = a \cdot b = (a \cdot b) + (a \cdot 0) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (ok)
2. (a) Induktionsannahme: Für $c \in \mathbb{N}$ gelte: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
 (b) Induktionsbehauptung: Dann gilt für $c + 1 \in \mathbb{N}$: $a \cdot (b + (c + 1))$
 (c) Induktionsbegründung:

$$\begin{aligned}
 a \cdot (b + (c + 1)) &\stackrel{n.Vor.A1}{=} a \cdot ((b + c) + 1) \\
 &\stackrel{n.Vor.A2}{=} a \cdot (b + c) + a \\
 &\stackrel{(2a)}{=} ((a \cdot b) + (a \cdot c)) + a \\
 &\stackrel{n.Vor.A1}{=} (a \cdot b) + ((a \cdot c) + a) \\
 &= (a \cdot b) + (a \cdot c + a) \\
 &\stackrel{n.Vor.A2}{=} (a \cdot b) + (a \cdot (c + 1))
 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3

Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Beweis durch vollständige Induktion über $c \in \mathbb{N}$:

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ beliebig

1. Induktionsanfang: $c = 0$
 $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot 0) = a \cdot 0 = (a \cdot b) \cdot 0 = (a \cdot b) \cdot c \quad (\text{ok})$
2. (a) Induktionsannahme: Für $c \in \mathbb{N}$ gelte: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
(b) Induktionsbehauptung: Dann gilt für $c+1 \in \mathbb{N}$: $a \cdot (b \cdot (c+1)) = (a \cdot b) \cdot (c+1)$
(c) Induktionsbegründung:

$$\begin{aligned}
a \cdot (b \cdot (c+1)) &\stackrel{A2}{=} a \cdot ((b \cdot c) + b) \\
&\stackrel{A2}{=} (a \cdot (b \cdot c)) + (a \cdot b) = a \cdot (b \cdot c) + (a \cdot b) \\
&\stackrel{(2a)}{=} ((a \cdot b) \cdot c) + (a \cdot b) \\
&= ((a \cdot b) \cdot c) + ((a \cdot b) \cdot 1) \\
&\stackrel{A2}{=} (a \cdot b) \cdot (c+1)
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4

Seien $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$

Beweise $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \wedge f(1, x_2, \dots, x_n)) \vee (\overline{x_1} \wedge f(0, x_2, \dots, x_n))$ durch Fallunterscheidung (2 Fälle):

1. Fall: $x_1 = 0$

$$\begin{aligned}
f(0, x_2, \dots, x_n) &= \underbrace{(0 \wedge f(1, x_2, \dots, x_n))}_0 \vee \underbrace{(1 \wedge f(0, x_2, \dots, x_n))}_{f(0, x_2, \dots, x_n)} \\
&= 0 \vee f(0, x_2, \dots, x_n) \\
&= f(0, x_2, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

2. Fall: $x_1 = 1$

$$\begin{aligned}
f(1, x_2, \dots, x_n) &= \underbrace{(1 \wedge f(1, x_2, \dots, x_n))}_{f(1, x_2, \dots, x_n)} \vee \underbrace{(0 \wedge f(0, x_2, \dots, x_n))}_0 \\
&= f(1, x_2, \dots, x_n) \vee 0 \\
&= f(1, x_2, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 5

Seien $a, b \in \{0, 1\}$. Beweise: $\underbrace{a \vee b}_x \equiv \underbrace{\overline{a} \wedge \overline{b}}_y$

a	b	x	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{a} \wedge \overline{b}$	y	$x \equiv y$
0	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1

Die Tabelle ergibt für $x \equiv y$ immer 1. Somit ist die Behauptung bewiesen.

□

Aufgabe 6

Seien $a, b, c \in \{0, 1\}$.

(a)

Zeige: $\underbrace{a \equiv b}_x \Rightarrow \underbrace{a \vee c \equiv b \vee c}_y$

a	b	c	x	$a \vee c$	$b \vee c$	y	$x \Rightarrow y$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Die Tabelle ergibt für $x \Rightarrow y$ immer 1. Somit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

(b)

Zeige: $\underbrace{a \equiv b}_u \Rightarrow \underbrace{a \wedge c \equiv b \wedge c}_v$

a	b	c	u	$a \wedge c$	$b \wedge c$	v	$u \Rightarrow v$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Die Tabelle ergibt für $u \Rightarrow v$ immer 1. Somit ist die Behauptung gezeigt. $\square$

Aufgabe 7

$$e_1 \vee \dots \vee e_n = 1 \Leftrightarrow \exists i : e_i = 1$$

$$\varphi((e_1 \vee \dots \vee e_n)) = 1 \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ sodass } \varphi(e_i) = 1$$

Reduktion auf $n = 2$ (o.B.d.A.):

$$\varphi((e_1 \vee e_2)) = 1$$

$$\Leftrightarrow \varphi(e_1) \vee \varphi(e_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \varphi(e_1) = 1 \text{ oder } \varphi(e_2) = 1$$

$\square$

Aufgabe 8

$$\begin{aligned} L(1) &= 1 = 1 + (2^0 - 1) \cdot 5 \\ L(2) &= 2 \cdot L(1) + 4 = L(1) + 5 = 1 + (2^1 - 1) \cdot 5 \\ L(3) &= 2 \cdot L(2) + 4 = L(2) + L(2) + 4 \\ &= 2 \cdot [L(1) + 5] + 4 \\ &= 2 \cdot L(1) + 4 + 2 \cdot 5 \\ &\stackrel{L(2)}{=} L(1) + 5 + 2 \cdot 5 \\ L(3) &= L(1) + 3 \cdot 5 = 1 + (2^2 - 1) \cdot 5 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Vermutung:

$$L(n) = 1 + 5 \cdot (2^{n-1} - 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$$

Beweis durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang: $n = 1$:

$$L(1) = 1 + 5 \cdot (2^0 - 1) = 1 \quad (\text{ok})$$

2. (a) Induktionsannahme: Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gelte: $L(n) = 1 + 5 \cdot (2^{n-1} - 1)$

(b) Induktionsbehauptung: Dann gilt für $n+1 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$: $L(n+1) = 1 + 5 \cdot (2^n - 1)$

(c) Induktionsbegründung:

$$\begin{aligned} L(n+1) &= 2 \cdot L(n) + 4 \\ &\stackrel{(2a)}{=} 2 \cdot [1 + 5 \cdot (2^{n-1} - 1)] + 4 \\ &= 2 + 10 \cdot (2^{n-1} - 1) + 4 \\ &= 10 \cdot 2^{n-1} - 4 \\ &= 5 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} - 4 \\ &= 5 \cdot 2^n - 4 \\ &= 1 + 5 \cdot 2^n - 5 \\ &= 1 + 5 \cdot (2^n - 1) \end{aligned}$$

□

Aufgabe 9

Nach Satz 1'b aus der Vorlesung:

$$\begin{aligned} e = 0 &\Leftrightarrow \exists a \notin T(f) : c(a) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists a \notin T(f) : x = a \\ &\Leftrightarrow \exists a \notin T(f) : X = a \Leftrightarrow X \geq T(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\varphi \text{ löst } e = 0 \Leftrightarrow \varphi \text{ löst } f(x) = 0 \quad \forall \varphi$$

$$\varphi(e) = 0 \Leftrightarrow \varphi(f(x)) = 0$$

$$e \equiv f(x)$$

□