

### 1. Benennung

Sei  $P_{j,i} = 1$ , genau dann wenn die Bits  $i..j$  einen Übertrag **propagieren**, d.h. falls ein Übertrag von  $j$  zu  $j + 1$  genau dann auftritt, wenn ein Übertrag von  $i - 1$  zu  $i$  auftritt.

Sei  $G_{j,i} = 1$ , genau dann wenn die Bits  $i..j$  einen Übertrag **generieren**, d.h. daß durch die Berechnung der Bits  $i..j$  ein Übertrag entsteht, der sich von  $j$  zu  $j + 1$  auswirkt.

### 2. Idee und Definition

$$\begin{aligned} P_{i,i} &= a_i \otimes b_i \\ G_{i,i} &= a_i \wedge b_i \\ P_{j,i} &= P_{j,i+1} \wedge P_{i,i} \\ G_{j,i} &= (P_{j,i+1} \wedge G_{i,i}) \vee G_{j,i+1} \\ P_{i,i+1} &= 1 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung behauptet nach Definition, daß ein Übertrag von  $i$  zu  $i + 1$  genau dann auftritt, wenn ein Übertrag von  $(i + 1) - 1$  zu  $i + 1$  auftritt. Dies gilt offenbar immer.

### 3. Teil-Geschlossene Form

$$\begin{aligned} P_{j,i} &= \bigwedge_{k=i}^j P_{k,k} \\ G_{j,i} &= \bigvee_{k=i}^j (P_{j,k+1} \wedge G_{k,k}) \end{aligned}$$

Beweis:

(a)  $j - i = 0$

$$\begin{aligned} P_{i,i} &\stackrel{nV}{=} P_{i,i} \\ &= \bigwedge_{k=i}^i P_{k,k} \\ G_{i,i} &\stackrel{nV}{=} G_{i,i} \\ &= P_{i,i+1} \wedge G_{i,i} \\ &= \bigvee_{k=i}^i (P_{i,k+1} \wedge G_{k,k}) \end{aligned}$$

(b)  $j - i > 0$

$$\begin{aligned}
P_{j,i} &\stackrel{nV}{=} P_{j,i+1} \wedge P_{i,i} \\
&\stackrel{IV}{=} \bigwedge_{k=i+1}^j P_{k,k} \wedge P_{i,i} \\
&= \bigwedge_{k=i}^j P_{k,k} \\
G_{j,i} &\stackrel{nV}{=} (P_{j,i+1} \wedge G_{i,i}) \vee G_{j,i+1} \\
&\stackrel{IV}{=} (P_{j,i+1} \wedge G_{i,i}) \vee \bigvee_{k=i+1}^j (P_{j,k+1} \wedge G_{k,k}) \\
&= \bigvee_{k=i}^j (P_{j,k+1} \wedge G_{k,k})
\end{aligned}$$

#### 4. Assoziativität

Behauptung:

$$\begin{aligned}
P_{c,a} &= P_{c,b+1} \wedge P_{b,a} \\
G_{c,a} &= (P_{c,b+1} \wedge G_{b,a}) \vee G_{c,b+1}
\end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
P_{c,a} &\stackrel{nD}{=} \bigwedge_{i=a}^c P_{i,i} \\
&= \bigwedge_{i=a}^b P_{i,i} \wedge \bigwedge_{i=b+1}^c P_{i,i} \\
&\stackrel{nD}{=} P_{c,b+1} \wedge P_{b,a} \\
G_{c,a} &\stackrel{nD}{=} \bigvee_{k=a}^c (P_{c,k+1} \wedge G_{k,k}) \\
&= \bigvee_{k=a}^b (P_{c,k+1} \wedge G_{k,k}) \vee \bigvee_{k=b+1}^c (P_{c,k+1} \wedge G_{k,k}) \\
&\stackrel{!!}{=} \bigvee_{k=a}^b (P_{c,b+1} \wedge P_{b,k+1} \wedge G_{k,k}) \vee \bigvee_{k=b+1}^c (P_{c,k+1} \wedge G_{k,k}) \\
&= \left( P_{c,b+1} \wedge \bigvee_{k=a}^b (P_{b,k+1} \wedge G_{k,k}) \right) \vee \bigvee_{k=b+1}^c (P_{c,k+1} \wedge G_{k,k}) \\
&\stackrel{nD}{=} (P_{c,b+1} \wedge G_{b,a}) \vee G_{c,b+1}
\end{aligned}$$