

1. **Aufgabe: (Zero-Berechnung)**

(5 Punkte)

Beweise oder widerlege:

Seien $a, b \in \{0, 1\}^n$; $s \in \{0, 1\}^{n+1}$; $[s] = [a] - [b]$

Dann gilt: $s[n-1:0] = 0^n \Leftrightarrow [a] = [b]$

Aus Aufgabe 4.6 wissen wir, daß $[\]$ bijektiv ist. Außerdem gilt:

$$[0^k] = -0 \cdot 2^{k-1} + \sum_{i=0}^{k-2} 0 \cdot 2^i = 0$$

Also ist $s = 0^{n+1}$ einzige Lösung für $[s] = 0$. Damit:

$$\begin{aligned} [a] = [b] &\Leftrightarrow [a] - [b] = 0 \\ &\Leftrightarrow [s] = 0 \\ &\Leftrightarrow s = 0^{n+1} \end{aligned}$$

2. **Aufgabe: (Decoder)**

(4 Punkte)

Betrachte den Decoder aus der Vorlesung. Es sei bereits bewiesen:

$Dec_{n-1}(x[n-2:0]) = y[2^{n-1}-1:0]$ mit $y_i = 1 \Leftrightarrow \langle x \rangle = i$

Beweise die Korrektheit von Dec_n .

Sei $y'[2^{n-1}-1:0] = Dec(x[n-2:0])$ und sei $y[2^n-1:0] = Dec(x[n-1:0])$.

$$\begin{aligned} y_i = 1 &\stackrel{IK}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y'_i \bmod 2^{n-1} = 1 \wedge \overline{x_{n-1}} = 1, \forall i \in \{0, \dots, 2^{n-1}-1\} \\ y'_i \bmod 2^{n-1} = 1 \wedge x_{n-1} = 1, \forall i \in \{2^{n-1}, \dots, 2^n-1\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y'_i = 1 \wedge x_{n-1} = 0, \forall i \in \{0, \dots, 2^{n-1}-1\} \\ y'_{i-2^{n-1}} = 1 \wedge x_{n-1} = 1, \forall i \in \{2^{n-1}, \dots, 2^n-1\} \end{cases} \\ &\stackrel{IV}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \langle x[n-2:0] \rangle = i \wedge x_{n-1} = 0, \forall i \in \{0, \dots, 2^{n-1}-1\} \\ \langle x[n-2:0] \rangle = i - 2^{n-1} \wedge x_{n-1} = 1, \forall i \in \{2^{n-1}, \dots, 2^n-1\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \langle x[n-1:0] \rangle = i, \forall i \in \{0, \dots, 2^n-1\} \end{aligned}$$

3. **Aufgabe: (Schneller Decoder)**

(4 + 5 + 7 Punkte)

(c) Bringe die Kostenformel des Schaltkreises in eine geschlossene Form.

$$\begin{aligned} C(n) &= n + n \cdot \sum_{j=1}^{\log_2 n} 2^{2^j-j} \\ &= n + \sum_{i=0}^{\log_2 n-1} 2^i \cdot 2^{\frac{n}{2^i}} \end{aligned}$$

Die Äquivalenz beider Darstellungen läßt sich leicht mit der Substitution $j := \log_2 n - i$ zeigen. Wir beweisen die 2. Darstellung.

i. $n = 1$

$$C(n) = 1 + \sum_{i=0}^{\log_2 1-1} 2^i \cdot 2^{\frac{1}{2^i}} = 1$$

ii. $\frac{n}{2} \rightarrow n$

$$\begin{aligned}
C(n) &\stackrel{nD}{=} 2 \cdot C\left(\frac{n}{2}\right) + 2^n \\
&\stackrel{IV}{=} 2 \cdot \left(\frac{n}{2} + \sum_{i=0}^{\log_2 \frac{n}{2} - 1} 2^i \cdot 2^{\frac{n}{2^i}} \right) + 2^n \\
&= n + \sum_{i=0}^{\log_2 n - 2} 2^{i+1} \cdot 2^{\frac{n}{2^{i+1}}} + 2^n \\
&= n + \sum_{i=1}^{\log_2 n - 1} 2^i \cdot 2^{\frac{n}{2^i}} + 2^0 \cdot 2^{\frac{n}{2^0}} \\
&= n + \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} 2^i \cdot 2^{\frac{n}{2^i}}
\end{aligned}$$