

Aufgabe 1: Topologische Sortierung

1. Algorithmus

Der Algorithmus arbeitet rekursiv:

(a) $G = (\emptyset, \emptyset)$

Dann ist die Sortierung trivial: $s = \emptyset$.

(b) $G = (V' \overset{\circ}{\cup} \{x\}, E)$ mit $\text{ingrad}_G(x) = 0$.

(x existiert nach Vorlesung.)

Sei $G' = (V', E \cap (V' \times V'))$.

Nach IV gibt es ein s' für G' , mit den geforderten Eigenschaften.

Sei $s = \{x \mapsto 0\} \cup \{x \mapsto y + 1 \mid x \mapsto y \in s'\}$.

Offenbar hat s die geforderten Eigenschaften.

2. Terminierung

Die Rekursionsrelation des Algorithmus ist die Teilmengen-Relation auf endlichen Mengen. Diese terminiert.

3. Korrektheit

zu Zeigen: (1) $s(x) = s(y) \Rightarrow x = y$

zu Zeigen: (2) $\forall (u, v) \in E : s(u) < s(v)$

Induktion über V .

(a) $G = (\emptyset, \emptyset)$

$(s = \emptyset) \wedge (E = \emptyset) \Rightarrow (1) \wedge (2)$

(b) $G = (V' \overset{\circ}{\cup} \{x\}, E)$ mit $\text{ingrad}_G(x) = 0$.

i. Injektivität

A. $s(a) = s(b) = 0 \Rightarrow a = x = b \Rightarrow (1)$

B. $s(a) = s(b) > 0 \Rightarrow a \in V' \wedge b \in V' \Rightarrow (IV \Rightarrow (1))$

ii. $\forall (u, v) \in E$

A. $u = x$

$v \neq x \wedge s(u) = s(x) = 0 < s'(v) + 1 = s(v) \Rightarrow (2)$

B. $u \neq x$

$u \in V' \wedge v \in V' \Rightarrow (IV \Rightarrow (2))$

□

Aufgabe 3: Potenzrechnung

Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Verweise beziehen sich auf 2.1 - 2.3.

12. $a^0 = 1$ (n. Def. Potenzierung)

13. $a^{b+1} = a^b \cdot a$ (n. Def. Potenzierung)

14. $a \cdot 1 = a$

(a) $a \cdot 1 \stackrel{(4)}{=} a \cdot (0 + 1) \stackrel{(9)}{=} a \cdot 0 + a \stackrel{(8)}{=} 0 + a \stackrel{(3)}{=} a$

15. $0 \cdot a = 0$

(a) $a = 0 : \quad 0 \cdot 0 \stackrel{(8)}{=} 0$

(b) $a \rightarrow a + 1 : \quad 0 \cdot (a + 1) \stackrel{(9)}{=} 0 \cdot a + 0 \stackrel{IV}{=} 0 + 0 \stackrel{(1)}{=} 0$

16. $a \cdot b + b = (a + 1) \cdot b$

(a) $b = 0 : \quad a \cdot 0 + 0 \stackrel{(1)}{=} a \cdot 0 \stackrel{(8)}{=} 0 \stackrel{(8)}{=} (a + 1) \cdot 0$

(b) $b \rightarrow b + 1 : \quad a \cdot (b + 1) + (b + 1) \stackrel{(9)}{=} (a \cdot b + a) + (b + 1) \stackrel{(7)}{=} (a + a \cdot b) + (b + 1) \stackrel{(2)}{=} ((a + a \cdot b) + b) + 1 \stackrel{(6)}{=} (a + (a \cdot b + b)) + 1 \stackrel{IV}{=} (a + (a + 1) \cdot b) + 1 \stackrel{(7)}{=} ((a + 1) \cdot b + a) + 1 \stackrel{(2)}{=} (a + 1) \cdot b + (a + 1) \stackrel{(9)}{=} (a + 1) \cdot (b + 1)$

17. $a \cdot b = b \cdot a$

(a) $b = 0 : \quad a \cdot 0 \stackrel{(8)}{=} 0 \stackrel{(15)}{=} 0 \cdot a$

(b) $b \rightarrow b + 1 : \quad a \cdot (b + 1) \stackrel{(9)}{=} a \cdot b + a \stackrel{IV}{=} b \cdot a + a \stackrel{(16)}{=} (b + 1) \cdot a$

18. $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

(a) $c = 0 : \quad a^{b+0} \stackrel{(1)}{=} a^b \stackrel{(14)}{=} a^b \cdot 1 \stackrel{(12)}{=} a^b \cdot a^0$

(b) $c \rightarrow c + 1 : \quad a^{b+(c+1)} \stackrel{(2)}{=} a^{(b+c)+1} \stackrel{(13)}{=} a^{b+c} \cdot a \stackrel{IV}{=} (a^b \cdot a^c) \cdot a \stackrel{(11)}{=} a^b \cdot (a^c \cdot a) \stackrel{(13)}{=} a^b \cdot a^{c+1}$

19. $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$

(a) $c = 0 : \quad (a \cdot b)^0 \stackrel{(12)}{=} 1 \stackrel{(14)}{=} 1 \cdot 1 \stackrel{(12)}{=} a^0 + b^0$

(b) $c \rightarrow c + 1 : \quad (a \cdot b)^{c+1} \stackrel{(13)}{=} (a \cdot b)^c \cdot (a \cdot b) \stackrel{IV}{=} (a^c \cdot b^c) \cdot (a \cdot b) \stackrel{(11)}{=} ((a^c \cdot b^c) \cdot a) \cdot b \stackrel{(17)}{=} ((b^c \cdot a^c) \cdot a) \cdot b \stackrel{(11)}{=} (b^c \cdot (a^c \cdot a)) \cdot b \stackrel{(13)}{=} (b^c \cdot a^{c+1}) \cdot b \stackrel{(17)}{=} (a^{c+1} \cdot b^c) \cdot b \stackrel{(11)}{=} a^{c+1} \cdot (b^c \cdot b) \stackrel{(13)}{=} a^{c+1} \cdot b^{c+1}$

□