Universität des Saarlandes
FR 6.2 - Informatik
Prof. Dr. W.J. Paul
Dipl. Inform. M. Klein
Dipl. Inform. T. In der Rieden

4. Übungsblatt Informatik II

(Abgabe: 23.05.2003)

---

1. **Aufgabe: (Potenzrechnung)** **(3 Punkte)**
   Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$.
   Beweise: $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
   Benutze dabei als Voraussetzung $a^0 = 1,\ a^{i+1} = a^i \cdot a$ sowie die schon bewiesenen Rechenregeln der letzten Blätter.

2. **Aufgabe: (Zahlendarstellung 1)** **(6 Punkte)**
   Sei $a \in \{0,1\}^m;\ m, n, i, j \in \mathbb{N};\ m > n$. Beweise:
   (a) $\langle a, 0^i \rangle = \langle a \rangle \cdot 2^i$
   (b) $\langle 0^j, a \rangle = \langle a \rangle$
   (c) $\langle a[m-1:0] \rangle \equiv \langle a[n-1:0] \rangle \pmod{2^n}$

3. **Aufgabe: (Modified Conditional Sum Adder)** **(4 + 6 + 4 + 6 Punkte)**
   (a) Seien $a, b \in \{0,1\};\ s, t \in \{0,1\}^2$.
   Konstruiere einen Schaltkreis, der die Funktion
   $MCSA_1 : (\langle s \rangle, \langle t \rangle) := (\langle a \rangle + \langle b \rangle, \langle a \rangle + \langle b \rangle + 1)$ berechnet.
   Der Schaltkreis darf maximal Kosten von 4 und eine Tiefe von 2 haben.
   (b) Seien $a, b \in \{0,1\}^n;\ s, t \in \{0,1\}^{n+1};\ n = 2^k$.
   Konstruiere rekursiv einen Schaltkreis, der die Funktion
   $MCSA_n : (\langle s \rangle, \langle t \rangle) := (\langle a \rangle + \langle b \rangle, \langle a \rangle + \langle b \rangle + 1)$ berechnet.
   Der Schaltkreis darf maximal Kosten von $2 \cdot C(MCSA_{\frac{n}{2}}) + 4 \cdot n$ und eine Tiefe von $D(MCSA_{\frac{n}{2}}) + 3$ haben.
   (c) Konstruiere einen n-Bit-Addierer. Benutze dazu einem $MCSA_n$. Die zusätzlichen Kosten im Vergleich zum $MCSA_n$ dürfen maximal $4 \cdot n$ und die zusätzliche Tiefe maximal 3 betragen.
   (d) Bringe die Kostenformel des so gebauten Addierers in eine geschlossene Form und beweise die Korrektheit deiner Antwort.

4. **Aufgabe: (Additionsbaum)** **(4 Punkte)**
   Sei $b = 2^k;\ k > 1$. Bringe die Tiefenformel des Additionsbaums
   $D(Tree_4) = 6;\ D(Tree_b) = D(Tree_{\frac{b}{2}}) + 6$
   in eine geschlossene Form und beweise die Korrektheit deiner Antwort.

5. **Aufgabe: (Modulorechnung)** **(6 Punkte)**
   Seien $a, x \in \mathbb{Z};\ k \in \mathbb{N}$. Beweise:
   Es existiert genau ein $x' \in \{a, ..., a+k-1\}$ mit $x \equiv x' \pmod{k}$

6. **Aufgabe: (Zahlendarstellung 2)** **(6 Punkte)**
   Sei $a \in \{0,1\}^n$. Beweise: Die Abbildung
   $[\ ] : \{0,1\}^n \to \{-2^{n-1}, ..., 2^{n-1}-1\};\ [a] := -a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \langle a[n-2:0] \rangle$
   ist bijektiv.

7. *** Aufgabe: (Kosten des CSA)** **(10 Punkte *)**
   Sei $n = 2^k$. Bringe die Kostenformel des Conditional Sum Adders
   $C(CSA_1) = 3;\ C(CSA_n) = 3 \cdot C(CSA_{\frac{n}{2}}) + 4 \cdot \frac{n}{2}$
   in eine geschlossene Form und beweise die Korrektheit deiner Antwort.