Universität des Saarlandes
FR 6.2 - Informatik
Prof. Dr. W.J. Paul
Dipl. Inform. M. Klein
Dipl. Inform. T. In der Rieden

2. Übungsblatt Informatik II

(Abgabe: 09.05.2003)

---

1. **Aufgabe: (Kommutativgesetz)** **(5 Punkte)**
   Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Beweise per Induktion:
   $a + b = b + a$
   Benutze dabei als einzige Voraussetzung $a + (b + 1) = (a + b) + 1$

2. **Aufgabe: (Distributivgesetz)** **(5 Punkte)**
   Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Beweise per Induktion:
   $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
   Benutze dabei als einzige Voraussetzung $a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a$ und Aufgabe 1.

3. **Aufgabe: (Assoziativgesetz)** **(5 Punkte)**
   Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Beweise per Induktion:
   $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
   Benutze dabei als einzige Voraussetzung Aufgabe 2.

4. **Aufgabe: (Funktionszerlegung)** **(5 Punkte)**
   Seien $x_1, ..., x_n \in \{0, 1\}$. Beweise per Induktion:
   $f(x_1, ..., x_n) = (x_1 \wedge f(1, x_2, ..., x_n)) \vee (\overline{x_1} \wedge f(0, x_2, ..., x_n))$

5. **Aufgabe: (Morgan-Formeln)** **(2 Punkte)**
   Seien $a, b \in \{0, 1\}$. Beweise: $a \vee b \equiv \overline{\overline{a} \wedge \overline{b}}$

6. **Aufgabe: (Erweiterungsregeln)** **(6 Punkte)**
   Seien $a, b, c \in \{0, 1\}$. Beweise:

   (a) $a \equiv b \Leftrightarrow a \vee c \equiv b \vee c$

   (b) $a \equiv b \Leftrightarrow a \wedge c \equiv b \wedge c$

7. **Aufgabe: (Rechenregeln)** **(4 Punkte)**
   Führe zurück auf eine abkürzungsfreie Schreibweise und beweise dann:
   $e_1 \vee ... \vee e_n = 1 \Leftrightarrow \exists i : e_i = 1$

8. **Aufgabe: (Rekursionsformeln)** **(10 Punkte)**
   Bringe folgende Differenzengleichung in eine geschlossene (nicht mehr rekursive) Form:
   $L(1) = 1\ ;\ L(n) = 2 \cdot L(n - 1) + 4$
   und beweise die Richtigkeit deiner Lösung per Induktion!
   Tipp: Setze die Formel mehrmals in sich selbst ein bis du die Lösung raten kannst und beweise dann per Induktion, dass du richtig geraten hast.

9. *** Aufgabe: (Konjunktive Normalform)** **(10 Punkte *)**
   Sei $a \in \{0, 1\}^n$. Dann definieren wir für $X \in \{0, 1\}^n$

   $$c(a) := \bigvee_{i=1}^{n} X_i^{\overline{a_i}}.$$

   Sei f eine n-stellige Schaltfunktion und $T(f)$ der Träger von f. Beweise:

   $$f(X) \equiv \bigwedge_{a \notin T(f)} c(a).$$

   Diese Form der Darstellung von f nennt man *konjunktive Normalform* KNF.
   Tipp: Der Beweis läuft sehr ähnlich wie der Beweis der Korrektheit der DNF.