



8. Musterlösung Informatik II

(Abgabe: 20.06.2003)

1. Aufgabe:

(a) Zunächst die Herleitung:

$$\begin{aligned}
 C(PP_{\circ}(n)) &= C(PP_{\circ}(\frac{n}{2})) + (n-1) \cdot C(\circ) \\
 &= C(PP_{\circ}(\frac{n}{4})) + (\frac{n}{2}-1) \cdot C(\circ) + (n-1) \cdot C(\circ) \\
 &= C(PP_{\circ}(\frac{n}{8})) + (\frac{n}{4}-1) \cdot C(\circ) + (\frac{n}{2}-1) \cdot C(\circ) + (n-1) \cdot C(\circ) \\
 &= C(PP_{\circ}(\frac{n}{8})) + \left(\sum_{i=0}^2 (\frac{n}{2^i} - 1) \right) \cdot C(\circ) \\
 &= C(PP_{\circ}(2^{k-3})) + \left(\sum_{i=0}^2 (2^{k-i} - 1) \right) \cdot C(\circ) \\
 &= C(PP_{\circ}(2^{k-3})) + \left(\sum_{i=0}^2 2^{k-i} - 3 \right) \cdot C(\circ) \\
 &= C(PP_{\circ}(2^{k-3})) + \left(2^k \cdot \sum_{i=0}^2 2^{-i} - 3 \right) \cdot C(\circ) \\
 &\stackrel{(*)}{=} C(PP_{\circ}(2^{k-3})) + \left(2^k \cdot (2 - \frac{1}{2^2}) - 3 \right) \cdot C(\circ)
 \end{aligned}$$

Wähle ein beliebiges j statt der konkreten Zahl 3:

$$C(PP_{\circ}(n)) = C(PP_{\circ}(2^{k-j})) + \left(2^k \cdot (2 - \frac{1}{2^{j-1}}) - j \right) \cdot C(\circ)$$

Und setze das maximale $j = k$ ein:

$$\begin{aligned}
 C(PP_{\circ}(n)) &= C(PP_{\circ}(2^{k-k})) + \left(2^k \cdot (2 - \frac{1}{2^{k-1}}) - k \right) \cdot C(\circ) \\
 &= C(PP_{\circ}(1)) + (2^{k+1} - 2 - k) \cdot C(\circ) \\
 &= 0 + (2n - \log_2 n - 2) \cdot C(\circ) \\
 &= (2n - \log_2 n - 2) \cdot C(\circ)
 \end{aligned}$$

Die Gleichung (*) gilt, weil

$$\sum_{i=0}^n 2^{-i} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Das soll an dieser Stelle nicht extra gezeigt werden.

Die hergeleitete geschlossene Form muss nun noch per Induktion über n bewiesen werden.

• **Induktionsanfang:** $n = 1$

$$\begin{aligned}
 C(PP_{\circ}(1)) &= (2 \cdot 1 - \log_2 1 - 2) \cdot C(\circ) \\
 &= 0 \cdot C(\circ) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$



8. Musterlösung Informatik II

(Abgabe: 20.06.2003)

- **Induktionsvoraussetzung:** Die Formel

$$C(PP_{\circ}(n)) = (2n - \log_2 n - 2) \cdot C(\circ)$$

gelte für ein beliebiges $n > 1$.

- **Induktionsschritt:** $n \rightarrow 2n$

$$\begin{aligned} C(PP_{\circ}(2n)) &= C(PP_{\circ}(n)) + (2n - 1) \cdot C(\circ) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} (2n - \log_2 n - 2) \cdot C(\circ) + (2n - 1) \cdot C(\circ) \\ &= (2n - \log_2 n - 2 + 2n - 1) \cdot C(\circ) \\ &= (4n - (\log_2 n + 1) - 2) \cdot C(\circ) \\ &= (4n - \log_2(2n) - 2) \cdot C(\circ) \end{aligned}$$

(b) Auch hier zunächst die Herleitung:

$$\begin{aligned} D(PP_{\circ}(n)) &\leq D(PP_{\circ}(\frac{n}{2})) + 2 \cdot D(\circ) \\ &\leq D(PP_{\circ}(\frac{n}{4})) + 2 \cdot D(\circ) + 2 \cdot D(\circ) \\ &\leq D(PP_{\circ}(\frac{n}{8})) + 2 \cdot D(\circ) + 2 \cdot D(\circ) + 2 \cdot D(\circ) \\ &= D(PP_{\circ}(\frac{n}{8})) + 3 \cdot 2 \cdot D(\circ) \\ &= D(PP_{\circ}(2^{k-3})) + 3 \cdot 2 \cdot D(\circ) \end{aligned}$$

Benutze ein beliebiges j anstelle von 3:

$$D(PP_{\circ}(n)) \leq D(PP_{\circ}(2^{k-j})) + j \cdot 2 \cdot D(\circ)$$

Wähle $j = k$ maximal:

$$\begin{aligned} D(PP_{\circ}(n)) &\leq D(PP_{\circ}(2^{k-k})) + k \cdot 2 \cdot D(\circ) \\ &= D(PP_{\circ}(1)) + k \cdot 2 \cdot D(\circ) \\ &= 0 + 2 \cdot \log_2 n \cdot D(\circ) \\ &= 2 \cdot \log_2 n \cdot D(\circ) \end{aligned}$$

Nun der Beweis durch Induktion über n .

- **Induktionsanfang:** $n = 1$

$$\begin{aligned} D(PP_{\circ}(1)) &\leq 2 \cdot \log_2 1 \cdot D(\circ) \\ &= 2 \cdot 0 \cdot D(\circ) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- **Induktionsvoraussetzung:** Die Formel

$$D(PP_{\circ}(n)) \leq 2 \cdot \log_2 n \cdot D(\circ)$$

gelte für ein beliebiges $n > 1$.



8. Musterlösung Informatik II

(Abgabe: 20.06.2003)

- Induktionsschritt: $n \rightarrow 2n$

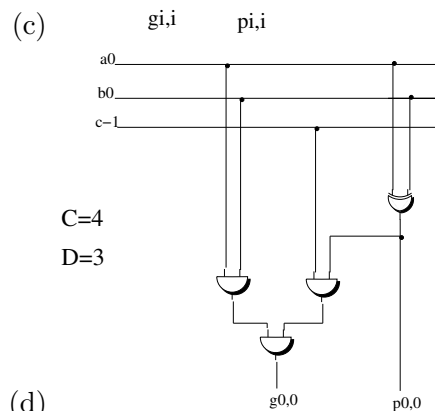
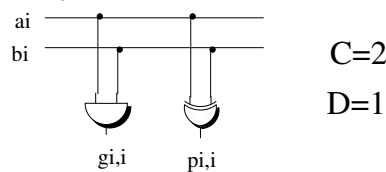
$$\begin{aligned}
 D(PP_o(2n)) &\leq D(PP_o(n)) + 2 \cdot D(o) \\
 &\stackrel{IV}{\leq} 2 \cdot \log_2 n \cdot D(o) + 2 \cdot D(o) \\
 &= 2 \cdot (\log_2 n + 1) \cdot D(o) \\
 &= 2 \cdot (\log_2(2n)) \cdot D(o)
 \end{aligned}$$

2. Aufgabe:

(a) $p_{j,i} = 1 \Leftrightarrow \langle a[j:i] \rangle + \langle b[j:i] \rangle = \langle 1^{j-i+1} \rangle$
 $c_j = (1^{j-i+1} + c_{i-1})[j-i+2] = 1^{j-i+1} [j-i+2] = 0$ falls $c_{i-1} = 0$
 $10^{j-i+1} [j-i+2] = 1$ falls $c_{i-1} = 1 \Rightarrow c_j = c_{j-1}$

(b) $g_{j,i} = 1 \Leftrightarrow \langle a[j:i] \rangle + \langle b[j:i] \rangle > \langle 1^{j-i+1} \rangle$
 $\Rightarrow \langle a[j:i] \rangle + \langle b[j:i] \rangle \geq \langle 10^{j-i+1} \rangle$
 $\langle a[j:i] \rangle + \langle b[j:i] \rangle \leq \langle 1^{j-i+1} \rangle + \langle 1^{j-i+1} \rangle = \langle 1^{j-i+1}0 \rangle$
 Aus den beiden Ungleichungen folgt:

$$\Rightarrow c_j = 1$$



(d)

(e)

$$g_2 = g_{j,k}, p_2 = p_{j,k}, g_1 = g_{k-1,i}, p_1 = p_{k-1,i} \quad i < k \leq j$$

$$\mathbf{z.z.} \quad g_{j,i} = g_2 \vee (g_1 \wedge p_2)$$

Diese Gleichung gilt, denn die Bits i bis j generieren einen Übertrag, wenn entweder schon die höherwertigen Bits k bis j ihn generieren, oder wenn die niederwertigen Bits i bis k-1 ihn generieren und die höherwertigen Bits ihn propagieren.

$$\mathbf{z.z.} \quad p_{j,i} = p_2 \wedge p_1$$

Diese Gleichung gilt, denn ein Übertrag wird von i bis j genau dann propagiert, wenn er



8. Musterlösung Informatik II

(Abgabe: 20.06.2003)

sowohl durch die niederwertigen Bits als auch durch die höherwertigen Bits propagiert wird.

(f) $(g_2, p_2) \circ (g_1, p_1) := (g_2 \vee (g_1 \wedge p_2), p_2 \wedge p_1)$ **z.z.** $\circ$ ist assoziativ.

Für das zweite Komponent folgt das direkt aus der Assoziativität von $\wedge$.

Seien: $(g', p') = (g_2, p_2) \circ (g_1, p_1)$

$(g'', p'') = (g_3, p_3) \circ (g_2, p_2) = (g_3 \vee (g_2 \wedge p_3), p_3 \wedge p_2)$

Das erste Komponent von $(g_3, p_3) \circ ((g_2, p_2) \circ (g_1, p_1))$ ist:

$e = g_3 \vee (g' \wedge p_3) = g_3 \vee ((g_2 \vee (g_1 \wedge p_2)) \wedge p_3) = g_3 \vee (g_2 \wedge p_3) \vee (g_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$

Das erste Komponent von $((g_3, p_3) \circ (g_2, p_2)) \circ (g_1, p_1)$ ist:

$f = g'' \vee (g_1 \wedge p'') = g_3 \vee (g_2 \wedge p_3) \vee (g_1 \wedge p_3 \wedge p_2) = g_3 \vee (g_2 \wedge p_3) \vee (g_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$

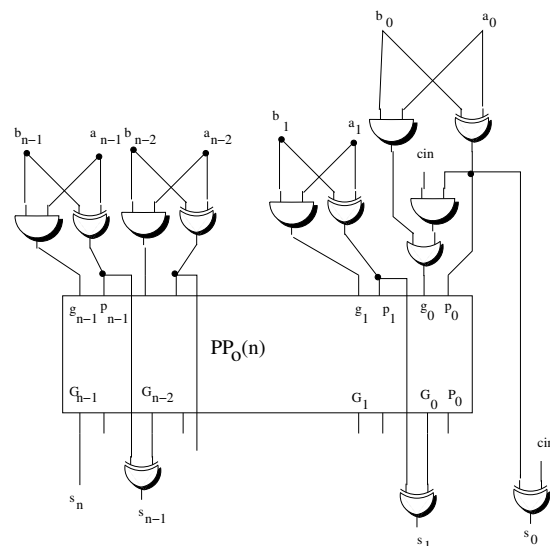
$e = f \Rightarrow \circ$ ist assoziativ.

(g) Nach Definition von g erkennt man, daß:

$$\begin{aligned} g_{i,0} = 1 &\equiv \langle a[i : 0] \rangle + \langle b[i : 0] \rangle + c_{-1} > \langle 1^{i+1} \rangle \\ &\rightarrow c_0 = 1 \wedge \dots \wedge c_{i-1} = 1 \wedge c_i = 1 \\ &\rightarrow g_{i,0} = c_i \end{aligned}$$

(h) Wenn alle Carry-Bits bekannt sind, kann das jeweilige Summenbit ohne Berücksichtigung der vorhergehenden Carry-Bits berechnet werden: $s_i = a_i \oplus b_i \oplus c_i$. Die Konstruktion ergibt sich aus der Konstruktion des Full-Adders, indem man die Gatter für das Übertrags-Bit wegoptimiert.

(i) Ein Carry-Lookahead-Addierer sieht folgendermaßen aus:





8. Musterlösung Informatik II

(Abgabe: 20.06.2003)

(j)

$$\begin{aligned}
 C(CLA_n) &= C(PP_o(n)) + 2n \cdot C_{xor} + (n+1) \cdot C_{and} + C_{or} \\
 &\stackrel{A1}{=} \sum_{i=0}^{\log n - 1} \left(\frac{n}{2^{i-1}} \cdot C(\circ) + 3n + 2 \right)
 \end{aligned}$$

(k)

$$\begin{aligned}
 D(CLA_n) &= D(PP_o(n)) + 2 \cdot D_{xor} + D_{and} + D_{or} \\
 &\stackrel{A1}{=} 2 \cdot \log n \cdot D(\circ) + 4
 \end{aligned}$$

3. * Aufgabe:

Am Anfang hat man eine 32-Bit unaercodierte Zahl.

1.Fall

-x wird encodet(also Binaercodiert), wobei man 5 Bits als Ergebniss bekommt;

-die 5 Bits werden mit 5 FlipFlops gespeichert;

-die 5 Bits am Ausgaenge der FlipFlops werden wieder durch einen Decoder unaer codiert.

2.Fall

Man speichert die 32-Bit unaercodierte Zahl in 32 FlipFlops.

Frage:

Wie teuer muss ein FlipFlop sein, damit der erste Fall guentiger ist als der Zweite!

Fuer die Kosten von dem Encoder(2^n Eingaenge, n Ausgaenge) gilt:

$$C(Enc_1)=1$$

$$C(Enc_n)=2 \cdot C(Enc_{n-1})+n.$$

Fuer die Kosten von dem Decoder(n Eingaenge, 2^n Ausgaenge) gilt:

$$C(Dec_1)=1$$

$$C(Dec_n)=C(Dec_{n-1})+2^n+1.$$

In unserem Fall ist n=5.

$$C(Enc_5)=2 \cdot C(Enc_4)+5$$

$$=2 \cdot (2 \cdot C(Enc_3)+4)+5$$

$$=4 \cdot (2 \cdot C(Enc_2)+3)+8+5$$

$$=8 \cdot (2 \cdot C(Enc_1)+2)+12+8+5$$

$$=16 \cdot C(Enc_1)+16+12+8+5.$$

$$=57$$

$$C(Dec_5)=C(Dec_4)+2^5+1$$

$$=C(Dec_3)+2^4+1+2^5+1$$

$$=C(Dec_2)+2^3+1+2^4+1+2^5+1$$

$$=C(Dec_1)+2^2+1+2^3+1+2^4+1+2^5+1$$

$$=65$$

Sei x die Kosten von FlipFlop.

Um die Frage zu beantworten, muss man die folgende Gleichung loesen:

$$57+5 \cdot x+65 < 32 \cdot x \leftrightarrow x > 4,52.$$

Der 1.Fall lohnt es sich fuer Kosten von dem FlipFlop ≥ 5 !