



7. Übungsblatt Informatik II

(Abgabe: 13.06.2003)

1. Aufgabe: (Prädikatsberechnung)

(6 Punkte)

(a) $\text{alu}(c) = \text{R-Type}(c) \wedge \text{IR}(c)[5] \wedge (\neg \text{IR}(c)[4]) \wedge (\neg \text{IR}(c)[3])$

(b) $\text{testi}(c) = \text{I-Type}(c) \wedge (\neg \text{IR}(c)[31]) \wedge \text{IR}(c)[30] \wedge \text{IR}(c)[29]$

(c) $\text{shifta}(c) = \text{R-Type}(c) \wedge (\neg \text{IR}(c)[5]) \wedge (\neg \text{IR}(c)[4]) \wedge (\neg \text{IR}(c)[3]) \wedge (\text{IR}(c)[0])$

2. Aufgabe: (Addressberechnung)

(6 Punkte)

Wir versuchen jetzt zu zeigen, dass die Stellen von x , die kleiner als k sind, bei der Abrundung weggehen, und damit wir sie danach mit 0'en ersetzen können.

Sei $x \in 0, 1^n$; z.z. $\lfloor \langle x \rangle / 2^k \rfloor \cdot 2^k = \langle x[n-1 : k] 0^k \rangle$

$$\lfloor \langle x \rangle / 2^k \rfloor \cdot 2^k = \lfloor (\langle x[n-1 : k] \rangle \cdot 2^k + \langle x[k-1 : 0] \rangle) / 2^k \rfloor \cdot 2^k$$

$$\lfloor \langle x \rangle / 2^k \rfloor \cdot 2^k = \lfloor \langle x[n-1 : k] \rangle + \langle x[k-1 : 0] \rangle / 2^k \rfloor \cdot 2^k$$

$$\lfloor \langle x \rangle / 2^k \rfloor \cdot 2^k = (\langle x[n-1 : k] \rangle + \lfloor \langle x[k-1 : 0] \rangle / 2^k \rfloor) \cdot 2^k$$

Da $\langle x[k-1 : 0] \rangle$ kleiner als 2^k ist, haben wir hier in Gausschen Klammern eine Zahl, die kleiner als 1 ist, und damit ergibt dieser Term in Gausschen Klammern 0.

$$\lfloor \langle x \rangle / 2^k \rfloor \cdot 2^k = \langle x[n-1 : k] \rangle \cdot 2^k$$

$$\lfloor \langle x \rangle / 2^k \rfloor \cdot 2^k = \langle x[n-1 : k] \rangle \cdot 2^k + \langle 0^k \rangle$$

Und nach der Aufgabe *Darstellungszzerlegung* (Übungsblatt 3 A5) folgt:

$$\lfloor \langle x \rangle / 2^k \rfloor \cdot 2^k = \langle x[n-1 : k] 0^k \rangle$$

3. Aufgabe: (2s complement Multiplizierer)

(6 + 6 + 6 Punkte)

(a) Zu beweisen ist:

$$[a] \cdot [b] = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle - (a_{n-1} \cdot \langle b[n-2 : 0] \rangle + \langle a[n-2 : 0] \rangle \cdot b_{n-1}) \cdot 2^n$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$[a] \cdot [b] - \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle = -(a_{n-1} \cdot \langle b[n-2 : 0] \rangle + \langle a[n-2 : 0] \rangle \cdot b_{n-1}) \cdot 2^n$$

Dies soll nun gezeigt werden.

$$\begin{aligned} [a] \cdot [b] - \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle &= (-a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \langle a[n-2 : 0] \rangle) \cdot (-b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \langle b[n-2 : 0] \rangle) \\ &\quad - ((a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \langle a[n-2 : 0] \rangle) \cdot (b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \langle b[n-2 : 0] \rangle)) \\ &= a_{n-1} \cdot b_{n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-1} - a_{n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot \langle b[n-2 : 0] \rangle \\ &\quad - \langle a[n-2 : 0] \rangle \cdot b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \langle a[n-2 : 0] \rangle \cdot \langle b[n-2 : 0] \rangle \\ &\quad - (a_{n-1} \cdot b_{n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot \langle b[n-2 : 0] \rangle) \end{aligned}$$



7. Übungsblatt Informatik II

(Abgabe: 13.06.2003)

$$\begin{aligned}
& + \langle a[n-2:0] \rangle \cdot b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \langle a[n-2:0] \rangle \cdot \langle b[n-2:0] \rangle \\
= & a_{n-1} \cdot b_{n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-1} + \langle a[n-2:0] \rangle \cdot \langle b[n-2:0] \rangle \\
& - (a_{n-1} \cdot \langle b[n-2:0] \rangle + \langle a[n-2:0] \rangle \cdot b_{n-1}) \cdot 2^{n-1} \\
& - (a_{n-1} \cdot b_{n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-1} + \langle a[n-2:0] \rangle \cdot \langle b[n-2:0] \rangle \\
& + (a_{n-1} \cdot \langle b[n-2:0] \rangle + \langle a[n-2:0] \rangle \cdot b_{n-1}) \cdot 2^{n-1}) \\
= & a_{n-1} \cdot b_{n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-1} - a_{n-1} \cdot b_{n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot 2^{n-1} \\
& + \langle a[n-2:0] \rangle \cdot \langle b[n-2:0] \rangle - \langle a[n-2:0] \rangle \cdot \langle b[n-2:0] \rangle \\
& - (a_{n-1} \cdot \langle b[n-2:0] \rangle + \langle a[n-2:0] \rangle \cdot b_{n-1}) \cdot 2^{n-1} \\
& - (a_{n-1} \cdot \langle b[n-2:0] \rangle + \langle a[n-2:0] \rangle \cdot b_{n-1}) \cdot 2^{n-1} \\
= & -2 \cdot (a_{n-1} \cdot \langle b[n-2:0] \rangle + \langle a[n-2:0] \rangle \cdot b_{n-1}) \cdot 2^{n-1} \\
= & - (a_{n-1} \cdot \langle b[n-2:0] \rangle + \langle a[n-2:0] \rangle \cdot b_{n-1}) \cdot 2^n
\end{aligned}$$

- (b) Sei $x \in \{0, 1\}^{2n}$. Dann gilt: $[x] \in \{-2^{2n-1}, \dots, 2^{2n-1} - 1\}$. Das ist der Wertebereich einer $2n$ -stelligen 2's complement Zahl.

Seien nun $a, b \in \{0, 1\}^n$. Somit gilt: $[a], [b] \in \{-2^{n-1}, \dots, 2^{n-1} - 1\}$. Zu zeigen ist:

$$[a] \cdot [b] \in \{-2^{2n-1}, \dots, 2^{2n-1} - 1\}$$

Es werden im Folgenden vier Fälle betrachtet, wobei jeweils $[a], [b]$ so gewählt werden, dass ihr Produkt maximal (falls positiv) bzw. minimal (falls negativ) wird. Der Beweis ist erbracht, wenn in allen Fällen das maximale (minimale) Produkt im darstellbaren Bereich einer $2n$ -stelligen 2's complement Zahl liegt.

- **1.Fall:** $[a]$ positiv, $[b]$ positiv

Wähle $[a] = 2^{n-1} - 1$ maximal und $[b] = 2^{n-1} - 1$ maximal. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
[a] \cdot [b] &= (2^{n-1} - 1) \cdot (2^{n-1} - 1) \\
&= (2^{n-1})^2 - 2 \cdot 2^{n-1} + 1 \\
&= 2^{2n-2} - 2^n + 1 \\
&< 2^{2n-1} - 1
\end{aligned}$$

Genau genommen müsste die letzte Relation noch per Induktion bewiesen werden. Dies habe ich jedoch weggelassen, da der Beweis sehr einfach ist und nur unnötig Platz verbraucht.

- **2.Fall:** $[a]$ positiv, $[b]$ negativ

Wähle $[a] = 2^{n-1} - 1$ maximal und $[b] = -2^{n-1}$ minimal. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
[a] \cdot [b] &= (2^{n-1} - 1) \cdot -2^{n-1} \\
&= -2^{2n-2} + 2^{n-1} \\
&> -2^{2n-1}
\end{aligned}$$

- **3.Fall:** $[a]$ negativ, $[b]$ positiv

Analog zum 2.Fall.

- **4.Fall:** $[a]$ negativ, $[b]$ negativ

Wähle $[a] = -2^{n-1}$ minimal und $[b] = -2^{n-1}$ minimal. Dann gilt:

$$[a] \cdot [b] = -2^{n-1} \cdot -2^{n-1}$$



7. Übungsblatt Informatik II

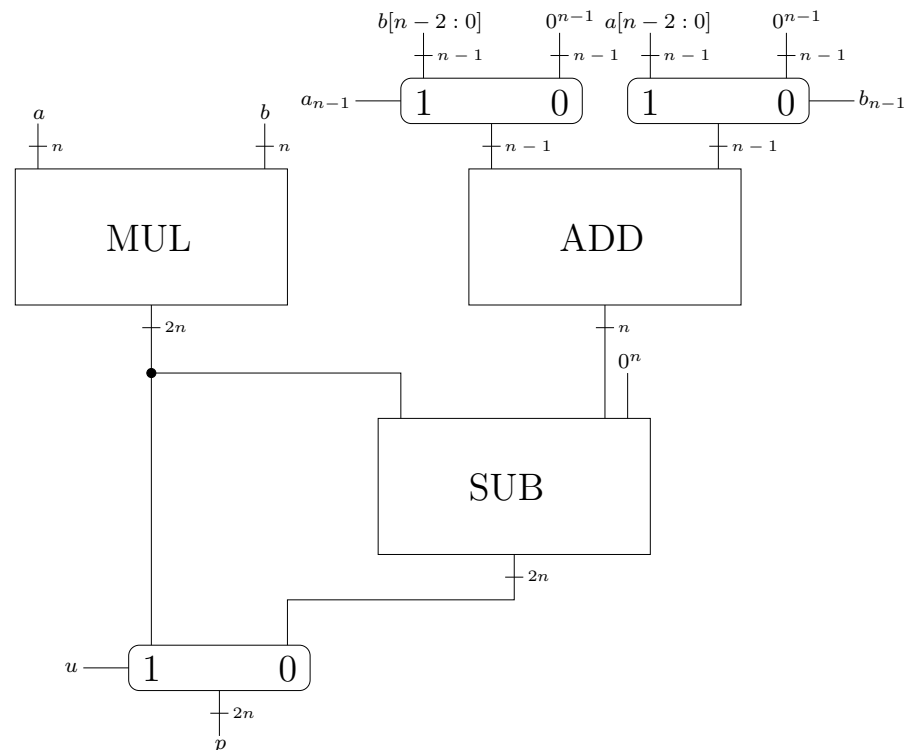
(Abgabe: 13.06.2003)

$$= 2^{2n-2}$$

$$\leq 2^{2n-1} - 1$$

(c) Der nachfolgende Schaltkreis benutzt die in Teil (a) bewiesene Gleichung, um im Fall $u = 0$ das Produkt $[p] = [a] \cdot [b]$ zu berechnen. Folgende Anmerkungen sollten noch erwähnt werden:

- Die Komponenten MUL, ADD und SUB stellen jeweils einen beliebigen Multiplizierer, Addierer oder Subtrahierer dar.
- a_{n-1} kann nur 1 oder 0 sein, somit ist das Produkt $a_{n-1} \cdot \langle b[n-2:0] \rangle$ entweder gleich $\langle b[n-2:0] \rangle$ oder gleich 0. Analog für das Produkt mit b_{n-1} .
- Eine Multiplikation mit 2^n entspricht gerade einem Linksshift um n Stellen und anschließendem Anhängen von n Nullen.



4. Aufgabe: (Parallel Prefix)

(8 + 2 Punkte)

a) Gegeben ist $n=2^k$.

Induktion ueber k

IA k=1

Nach der Konstruktion gilt:

$$y_0 = x_0$$

$$y_1 = x_1 \circ x_0$$

IV

Sei fuer $i \in \{0, \dots, n/2 - 1\}$

$$Y'_i = X'_i \circ \dots \circ X'_0.$$



7. Übungsblatt Informatik II

(Abgabe: 13.06.2003)

Sei fuer $i \in \{1, \dots, n/2 - 1\}$

$$Y'_{i-1} = X'_{i-1} \circ \dots \circ X'_0$$

.

IS $k-1 \rightarrow k$

Fuer $i \in \{0, \dots, n/2 - 1\}$ gilt nach der Konstruktion:

$$Y_{2i+1}$$

$$= Y'_i$$

$$=^{IV} X'_i \circ \dots \circ X'_0$$

$$= (X_{2i+1} \circ X_{2i}) \circ \dots \circ (X_1 \circ X_0)$$

Fuer $i \in \{1, \dots, n/2 - 1\}$ gilt nach der Konstruktion:

$$Y_{2i}$$

$$= X_{2i} \circ Y'_{i-1}$$

$$=^{IV} X_{2i} \circ (X'_{i-1} \circ \dots \circ X'_0)$$

$$= X_{2i} \circ (X_{2i-1} \circ X_{2i-2}) \circ \dots \circ (X_1 \circ X_0)$$

b)

Nach der Konstruktion gilt:

$$C(1) = 0$$

$$C(n) = C(n/2) + (n-1) \cdot C(\circ)$$

$$D(1) = 0$$

$$D(n) = D(n/2) + 2 \cdot D(\circ)$$

5. * Aufgabe: (Encoder)

(10 Punkte *)

Folgender Schaltkreis implementiert die geforderten Eigenschaften:

- (a) Um den Encoder rekursiv zu konstruieren, braucht man zunächst ja mal einen 1-bit-Encoder:

$$y_0 = x_1, nz = x_1 \vee x_0$$

- (b) auf diesem aufbauend kann man den Encoder dann auf grössere Eingänge erweitern:

