



4. Musterlösung Informatik II

(Abgabe: 23.05.2003)

1. Aufgabe: (Potenzrechnung)

(3 Punkte)

Beweis durch Induktion über c .

- *Induktionsanfang:* $c = 0$

$$(a^b)^c = (a^b)^0 \stackrel{\text{Vor}}{=} 1 = a^0 = a^{b \cdot 0} = a^{b \cdot c}$$

- *Induktionsvoraussetzung:* Die Behauptung gelte für ein beliebiges c :

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

- *Induktionsschritt:* $c \rightarrow c + 1$

$$\begin{aligned} (a^b)^{c+1} &\stackrel{\text{Vor}}{=} (a^b)^c \cdot a^b \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} a^{b \cdot c} \cdot a^b \\ &\stackrel{\text{Ü3, A3}}{=} a^{b \cdot c + b} \\ &= a^{b \cdot (c+1)} \end{aligned}$$

2. Aufgabe: (Zahlendarstellung 1)

(6 Punkte)

Man kann diese Aufgabe sicherlich auch mit Induktion lösen, doch es geht einfacher, wenn man die Darstellungszerlegung (Blatt 3, Aufgabe 5) mit einem geeignet zu wählenden Parameter h anwendet.

- (a) Den Fall $i = 0$ muss man gesondert betrachten, da hier die im Folgenden gezeigte Darstellungszerlegung nicht möglich ist (da $h > 0$ gewählt sein muss).

Im Falle $i = 0$ hat man jedoch:

$$\langle a, 0^i \rangle = \langle a, 0^0 \rangle = \langle a \rangle$$

Es gibt hier also nichts zu zeigen (da keine weiteren Stellen an a angehängt werden).

Sei nun $i > 0$ beliebig. Definiere:

$$\langle b \rangle := \langle a, 0^i \rangle$$

Die Zahl b hat also gerade $m + i$ Binärstellen. Dann gilt (mit $h = i$):

$$\begin{aligned} \langle b \rangle &= \langle b[m + i - 1 : i] \rangle \cdot 2^i + \langle b[i - 1 : 0] \rangle \\ &= \langle a[m - 1 : 0] \rangle \cdot 2^i + \underbrace{\langle 0 \dots 0 \rangle}_{i \text{ mal}} \\ &= \langle a \rangle \cdot 2^i + 0 \\ &= \langle a \rangle \cdot 2^i \end{aligned}$$

- (b) Analog zu (a) muss der Fall $j = 0$ gesondert betrachtet werden. Es gilt jedoch auch hier:

$$\langle 0^j, a \rangle = \langle a \rangle$$



4. Musterlösung Informatik II

(Abgabe: 23.05.2003)

Sei nun $j > 0$ beliebig. Definiere:

$$\langle c \rangle := \langle 0^j, a \rangle$$

Die Zahl c hat $j + m$ Binärstellen. Mit $h = m$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle c \rangle &= \langle c[j + m - 1 : m] \rangle \cdot 2^m + \langle c[m - 1 : 0] \rangle \\ &= \langle \underbrace{0 \dots 0}_{j \text{ mal}} \rangle \cdot 2^m + \langle a[m - 1 : 0] \rangle \\ &= 0 \cdot 2^m + \langle a \rangle \\ &= 0 + \langle a \rangle \\ &= \langle a \rangle \end{aligned}$$

(c) Zur Erinnerung (Definition von Kongruenz modulo n):

$$a \equiv b \pmod{n} := n \mid (a - b)$$

Im konkreten Fall ist also zu zeigen:

$$(2^n) \mid (\langle a[m - 1 : 0] \rangle - \langle a[n - 1 : 0] \rangle)$$

Zum Nachweis verwenden wir erneut eine Darstellungszerlegung mit $h = n$ (zulässig, da $m > n$):

$$\begin{aligned} \langle a[m - 1 : 0] \rangle - \langle a[n - 1 : 0] \rangle &= \langle a[m - 1 : n] \rangle \cdot 2^n + \langle a[n - 1 : 0] \rangle - \langle a[n - 1 : 0] \rangle \\ &= \langle a[m - 1 : n] \rangle \cdot 2^n \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist ein Vielfaches von 2^n , also sicherlich ohne Rest dadurch teilbar. Damit ist die Kongruenz bewiesen.

3. Aufgabe: (Modified Conditional Sum Adder) (4 + 6 + 4 + 6 Punkte)

Can Kayali

Müller / Paul S. 26f

4. Aufgabe: (Additionsbaum) (4 Punkte)

Gegeben ist folgende Formel (mit $b = 2^k$, $k > 1$):

$$D(Tree_b) = \begin{cases} 6 & , b = 4 \\ D(Tree_{\frac{b}{2}}) + 6 & , b > 4 \end{cases}$$

Um eine geschlossene Form herzuleiten, setzt man obige Formel ein paar mal in sich selbst ein, bis man das Ergebnis raten kann:

$$\begin{aligned} D(Tree_b) &= D(Tree_{\frac{b}{2}}) + 6 \\ &= (D(Tree_{\frac{b}{4}}) + 6) + 6 \\ &= ((D(Tree_{\frac{b}{8}}) + 6) + 6) + 6 \\ &= D(Tree_{\frac{b}{8}}) + 3 \cdot 6 \\ &= D(Tree_{2^{k-3}}) + 3 \cdot 6 \end{aligned}$$



4. Musterlösung Informatik II

(Abgabe: 23.05.2003)

Statt der konkreten Zahl 3 benutzen wir nun ein beliebiges i :

$$D(\text{Tree}_b) = D(\text{Tree}_{2^{k-i}}) + i \cdot 6$$

Für i setzen wir nun den maximal möglichen Wert $k - 2$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned} D(\text{Tree}_b) &= D(\text{Tree}_{2^{k-(k-2)}}) + (k-2) \cdot 6 \\ &= D(\text{Tree}_{2^2}) + (k-2) \cdot 6 \\ &= D(\text{Tree}_4) + (k-2) \cdot 6 \\ &= 6 + (k-2) \cdot 6 \\ &= 6 \cdot (k-1) \\ &\stackrel{(*)}{=} 6 \cdot (\log_2 b - 1) \\ &= 6 \log_2 b - 6 \end{aligned}$$

Die Gleichung $(*)$ gilt, weil aus $b = 2^k$ folgt, dass $k = \log_2 b$.

Obiges Ergebnis ist nun durch Induktion über b zu verifizieren.

- *Induktionsanfang:* $b = 4$

$$6 \cdot \log_2 b - 6 = 6 \cdot \log_2 4 - 6 = 6 \cdot 2 - 6 = 6 \stackrel{\text{Def}}{=} D(\text{Tree}_4)$$

- *Induktionsvoraussetzung:* Für ein beliebiges b gelte

$$D(\text{Tree}_b) = 6 \log_2 b - 6$$

- *Induktionsschritt:* $b \rightarrow 2b$

$$\begin{aligned} 6 \cdot \log_2(2b) - 6 &= 6 \cdot (\log_2 b + 1) - 6 \\ &= 6 \cdot \log_2 b - 6 + 6 \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} D(\text{Tree}_b) + 6 \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} D(\text{Tree}_{2b}) \end{aligned}$$

5. Aufgabe: (Modulorechnung)

(6 Punkte)

Ivelina Stavreva

6. Aufgabe: (Zahlendarstellung 2)

(6 Punkte)

- Injektivität:

Seien $(a_{n-1}, \dots, a_0) \neq (b_{n-1}, \dots, b_0)$

$$\text{z.z. } -a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i \cdot 2^i \neq -b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i \cdot 2^i$$

Sei j der größte Index mit $a_j \neq b_j \Rightarrow a_k = b_k$ für $k > j$

$$D = [a] - [b] = -a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i \cdot 2^i + b_{n-1} \cdot 2^{n-1} - \sum_{i=0}^{n-2} b_i \cdot 2^i$$



4. Musterlösung Informatik II

(Abgabe: 23.05.2003)

$$= -(a_{n-1} - b_{n-1}) \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} (a_i - b_i) \cdot 2^i$$

Sei o.B.d.A. $a_j > b_j \Rightarrow a_j - b_j = 1$

Für $k < j$ gilt: $a_k - b_k \leq 1$.

$$\Rightarrow D = -(a_{n-1} - b_{n-1}) \cdot 2^{n-1} + \sum_{i=j+1}^{n-2} (a_i - b_i) \cdot 2^i + (a_j - b_j) \cdot 2^j + \sum_{i=0}^{j-1} (a_i - b_i) \cdot 2^i$$

1.Fall: $j = n - 1 \Rightarrow a_{n-1} - b_{n-1} = 1$

$$D \leq -2^j + \sum_{i=0}^{j-1} 1 \cdot 2^i \Rightarrow D \leq -2^j + \frac{2^j - 1}{2 - 1} \leq -1 \neq 0$$

2.Fall: $j < n - 1$

$$D \geq 2^j - \sum_{i=0}^{j-1} 1 \cdot 2^i \geq 1 \neq 0$$

- Bijektivität:

$$\#\{0, 1\}^n = 2^n = \#\{-2^{n-1}, \dots, 2^{n-1} - 1\}$$

Eine injektive Abbildung zwischen 2 gleich großen Mengen ist automatisch bijektiv.

7. * Aufgabe: (Kosten des CSA)

(10 Punkte *)

Marcus Reinhard

Keller / Paul S. 194ff