



2. Musterlösung Informatik II

(Abgabe: 09.05.2003)

1. Aufgabe: (Kommutativgesetz)

(5 Punkte)

z.z. $a + b = b + a$ mit gegebener Voraussetzung $V : a + (b + 1) = (a + b) + 1$ Induktion über b **I.A.** $b = 0$

$$a + 0 = a = 0 + a$$

ANMERKUNG: An dieser Stelle müsste man eigentlich noch $0 + a = a$ zeigen. Dies geht über eine Induktion über a . Jeder Student, der das erkennt und richtig durchgeführt hat bekommt einen Bonuspunkt!

I.V. $a + b = b + a$ **I.S.** $b \rightarrow b + 1$

$$a + (b + 1) \stackrel{V}{=} (a + b) + 1$$

$$\stackrel{I.V.}{=} (b + a) + 1$$

$$\stackrel{V}{=} b + (a + 1)$$

$$= b + (1 + a) *$$

$$= (b + 1) + a **$$

ANMERKUNG: An Stelle $*$ müsste man eigentlich noch $1 + a = a + 1$ zeigen. Dies geht über eine Induktion über a . Jeder Student, der das erkennt und richtig durchgeführt hat bekommt einen Bonuspunkt!

ANMERKUNG: An Stelle $**$ müsste man eigentlich noch die Assoziativität der Addition zeigen. Dies geht über eine Induktion über a oder b . Jeder Student, der das erkennt und richtig durchgeführt hat bekommt zwei Bonuspunkte!

2. Aufgabe: (Distributivgesetz)

(5 Punkte)

z.z. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ mit gegebener Voraussetzung $V : a \cdot (b + 1) = (a \cdot b) + a$ Induktion über c **I.A.** $c = 0$

$$a \cdot (b + 0) = a \cdot b = a \cdot b + 0 = (a \cdot b) + (a \cdot 0)$$

I.V. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ **I.S.** $c \rightarrow c + 1$

$$a \cdot (b + (c + 1)) \stackrel{Def. Aufg. 1}{=} a \cdot ((b + c) + 1)$$

$$\stackrel{V}{=} a \cdot (b + c) + a$$

$$\stackrel{I.V.}{=} (a \cdot b) + (a \cdot c) + a$$

$$\stackrel{V}{=} (a \cdot b) + (a \cdot (c + 1))$$

3. Aufgabe: (Assoziativgesetz)

(5 Punkte)

z.z. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Induktion über c **I.A.** $c = 0$

$$a \cdot (b \cdot 0) = a \cdot 0 = 0 = (a \cdot b) \cdot 0$$



2. Musterlösung Informatik II

(Abgabe: 09.05.2003)

I.V. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

I.S. $c \rightarrow c + 1$

$a \cdot (b \cdot (c + 1)) \stackrel{Def. Aufg. 2}{=} a \cdot (b \cdot c + b)$

$\stackrel{Aufg. 2}{=} a \cdot (b \cdot c) + a \cdot b$

$\stackrel{I.V.}{=} (a \cdot b) \cdot c + (a \cdot b) \cdot 1$

$\stackrel{Aufg. 2}{=} (a \cdot b) \cdot (c + 1)$

4. Aufgabe: (Funktionszerlegung)

(5 Punkte)

Fallunterscheidung:

1. $x_1 = 0$:

$(0 \wedge f(1, x_2, \dots, x_n)) \vee (1 \wedge f(0, x_2, \dots, x_n))$

$= 0 \vee (1 \wedge f(0, x_2, \dots, x_n))$

$= 1 \wedge f(0, x_2, \dots, x_n)$

$= f(0, x_2, \dots, x_n)$ q.e.d.

2. $x_1 = 1$:

$(1 \wedge f(1, x_2, \dots, x_n)) \vee (0 \wedge f(0, x_2, \dots, x_n))$

$= f(1, x_2, \dots, x_n) \vee (0 \wedge f(0, x_2, \dots, x_n))$

$= f(1, x_2, \dots, x_n) \vee 0$

$= f(1, x_2, \dots, x_n)$ q.e.d.

5. Aufgabe: (Morgan-Formeln)

(2 Punkte)

Da es sich hier nur um 2 Variablen handelt, ist die Korrektheit mit einer Wahrheitstabelle schnell gezeigt:

a	b	$a \vee b$	$\sim(\sim a \wedge \sim b)$
0	0	$0 \vee 0 = 0$	$\sim(\sim 0 \wedge \sim 0) = \sim(1 \wedge 1) = \sim 1 = 0$
0	1	$0 \vee 1 = 1$	$\sim(\sim 0 \wedge \sim 1) = \sim(1 \wedge 0) = \sim 0 = 1$
1	0	$1 \vee 0 = 1$	$\sim(\sim 1 \wedge \sim 0) = \sim(0 \wedge 1) = \sim 0 = 1$
1	1	$1 \vee 1 = 1$	$\sim(\sim 1 \wedge \sim 1) = \sim(0 \wedge 0) = \sim 0 = 1$

Da die dritte und vierte Spalte in jeder Zeile denselben Wert haben, ist die Gleichheit beider Seiten gezeigt.

6. Aufgabe: (Erweiterungsregeln)

(6 Punkte)

Da es sich hier um 3 Variablen handelt, könnte man die Korrektheit auch mit einer 8-zeiligen Tabelle schnell zeigen. Hier zeigen wir es eleganter über eine Fallunterscheidung.

(a) i. 1.Fall: $a=b=0 \Rightarrow a \vee c = 0 \vee c = c = 0 \vee c = b \vee c$

ii. 2.Fall: $a=b=1 \Rightarrow a \vee c = 1 \vee c = 1 = 1 \vee c = b \vee c$

(b) i. 1.Fall: $a=b=0 \Rightarrow a \wedge c = 0 \wedge c = 0 = 0 \wedge c = b \wedge c$

ii. 2.Fall: $a=b=1 \Rightarrow a \wedge c = 1 \wedge c = c = 1 \wedge c = b \wedge c$

7. Aufgabe: (Rechenregeln)

(4 Punkte)

$e_1 \vee \dots \vee e_n = 1 \Leftrightarrow \exists i : e_i = 1$



2. Musterlösung Informatik II (Abgabe: 09.05.2003)

ist eine abkürzende Schreibweise für:

$$\exists \varphi : \varphi(e_1 \vee \dots \vee e_n) = 1 \Leftrightarrow \exists i : \varphi(e_i) = 1$$

was soviel heißt wie

$$\exists \varphi : \varphi(e_1) = 1 \text{ oder } \dots \text{ oder } \varphi(e_n) = 1 \Leftrightarrow \exists i : \varphi(e_i) = 1$$

8. Aufgabe: (Rekursionsformeln)

(10 Punkte)

- Gegeben: Folgende Differenzengleichung soll in eine geschlossene Form umgewandelt werden:

$$L(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ 2 \cdot L(n-1) + 4 & , n > 1 \end{cases}$$

- Herleitung: Um eine geschlossene Form herzuleiten, setzen wir die Gleichung solange in sich selbst ein, bis ein gewisses „Schema“ erkennbar wird:

$$\begin{aligned} L(n) &= 2 \cdot L(n-1) + 4 \\ &= 2 \cdot (2 \cdot L(n-2) + 4) + 4 \\ &= 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot L(n-3) + 4) + 4) + 4 \\ &= 2^3 \cdot L(n-3) + 4 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 \\ &= 2^3 \cdot L(n-3) + 4 \cdot \sum_{i=0}^2 2^i \end{aligned}$$

Dies ist das Schema, nach dem wir gesucht haben. Statt der konkreten Zahl 3 benutzen wir nun eine Variable k :

$$L(n) = 2^k \cdot L(n-k) + 4 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} 2^i$$

Die Summe kann ersetzt werden:

$$\sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k - 1$$

Damit vereinfacht sich obige Formel zu

$$L(n) = 2^k \cdot L(n-k) + 4 \cdot (2^k - 1)$$

Um die endgültige geschlossene Form zu erhalten, wählen wir jetzt $k = n - 1$:

$$\begin{aligned} L(n) &= 2^{n-1} \cdot L(n - (n-1)) + 4 \cdot (2^{n-1} - 1) \\ &\stackrel{\text{Def}}{=} 2^{n-1} \cdot 1 + 4 \cdot 2^{n-1} - 4 \\ &= 5 \cdot 2^{n-1} - 4 \end{aligned}$$

- Beweis: Induktion über n .
- Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} L(1) &= 5 \cdot 2^{1-1} - 4 \\ &= 5 \cdot 1 - 4 \\ &= 1 \end{aligned}$$



2. Musterlösung Informatik II

(Abgabe: 09.05.2003)

- Induktionsvoraussetzung: $L(n) = 5 \cdot 2^{n-1} - 4$ gelte für ein beliebiges n .
- Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned}
 L(n+1) &\stackrel{\text{Def}}{=} 2 \cdot L(n) + 4 \\
 &\stackrel{\text{IV}}{=} 2 \cdot (5 \cdot 2^{n-1} - 4) + 4 \\
 &= 5 \cdot 2^n - 8 + 4 \\
 &= 5 \cdot 2^n - 4
 \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass die zuvor bestimmte Formel zur Berechnung von $L(n)$ korrekt ist.

9. * Aufgabe: (Konjunktive Normalform)

(10 Punkte *)

Lemma 1: $x_i^{\bar{a}_i} = 0 \Leftrightarrow x_i = a_i$

Beweis:

x_i	a_i	$\bar{a}_i$	$x_i^{a_i}$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Lemma 2: $c(a)=0 \Leftrightarrow X=a$

Beweis:

$$c(a) = \bigvee_{i=1}^n x_i^{\bar{a}_i} = 0 \Leftrightarrow x_i^{\bar{a}_i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \stackrel{\text{Lemma 1}}{\Leftrightarrow} x_i = a_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow X=a.$$

Beweis Aufg. 9:

$$\text{z.z. } \forall \varphi : \varphi(\bigwedge_{a \notin T(f)} c(a)) = \varphi(f(X)) \text{ oder gleichbedeutend } \bigwedge_{a \notin T(f)} c(a) = 0 \Leftrightarrow f(X)=0$$

$$\bigwedge_{a \notin T(f)} c(a)=0 \Leftrightarrow \exists a \notin T(f) : c(a)=0 \stackrel{\text{Lemma 2}}{\Leftrightarrow} \exists a \notin T(f) : X=a \Leftrightarrow f(X)=0, \text{ da } a \notin T(f).$$