Universität des Saarlandes
FR 6.2 - Informatik
Prof. Dr. W.J. Paul
Dipl. Inform. M. Klein
Dipl. Inform. T. In der Rieden

Lösungsvorschlag zur 1. Teilklausur Informatik II

(Datum: 21.06.2003)

1. **Aufgabe** **(4 + 6 Punkte)**

(a) Beweis durch vollständige Induktion über n.

Induktionsanfang: $n = 0$: $\sum_{i=0}^{0} i = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$

Induktionsanfang: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i &= \sum_{i=0}^{n} i + (n+1) \\
&\overset{IV}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{2 \cdot (n+1)}{2} \\
&= \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \Rightarrow \text{Behauptung}
\end{aligned}$$

(b) Beweis durch vollständige Induktion über n.

Induktionsanfang: $n = 0$: $\sum_{i=0}^{n} i^2 = 0 = \frac{0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0 + 1)}{6}$

Induktionsanfang: $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=0}^{n} i^2 + (n+1)^2 \\
&\overset{IV}{=} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n+1)}{6} + \frac{6 \cdot (n+1)^2}{6} \\
&= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n+1) + 6 \cdot (n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (n \cdot (2 \cdot n+1) + 6 \cdot (n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (2 \cdot n^2 + n + 6 \cdot n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (2 \cdot n^2 + 7 \cdot n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (2 \cdot (n+1) + 1)}{6} \Rightarrow \text{Behauptung}
\end{aligned}$$

Universität des Saarlandes
FR 6.2 - Informatik
Prof. Dr. W.J. Paul
Dipl. Inform. M. Klein
Dipl. Inform. T. In der Rieden

Lösungsvorschlag zur 1. Teilklausur Informatik II

(Datum: 21.06.2003)

2. **Aufgabe** **(4 Punkte)**

(a) $A \cup B = \{1,2,3,5\} \cup \{1,2,4,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}$
$\#(A \cup B) = \#\{1,2,3,4,5,6\} = 6$

(b) $A \backslash (A \cap B) = \{1,2,3,5\} \backslash \{1,2\} = \{3,5\}$
$\#(A \backslash (A \cap B)) = \#\{3,5\} = 2$

(c) $(A^2) = \{1,2,3,5\}^2 =$
$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,5),$
$(2,1),(2,2),(2,3),(2,5),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,5),$
$(5,1),(5,2),(5,3),(5,5)\}$
$\#(A^2) = \#(A)^2 = 4^2 = 16$

(d) $A \times B = \{1,2,3,5\} \times \{1,2,4,6\} =$
$\{(1,1),(1,2),(1,4),(1,6),$
$(2,1),(2,2),(2,4),(2,6),$
$(3,1),(3,2),(3,4),(3,6),$
$(5,1),(5,2),(5,4),(5,6)\}$
$\#(A \times B) = \#(A) \cdot \#(B) = 4 \cdot 4 = 16$

3. **Aufgabe** **(5 Punkte)**

Induktionsanfang: $B = \emptyset \Rightarrow \#(B) = 0$

$$\begin{aligned} \#(A \cup B) &= \#(A \cup \emptyset) \\ &= \#A \\ &= \#A + 0 - 0 \\ &= \#A + \#\emptyset - \#\emptyset \\ &= \#A + \#B - \#(A \cap B) \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$

Induktionsschritt: $B \to B' = B \cup \{b\}$

Um den Induktionsschritt zeigen zu können, muss eine Fallunterscheidung bzgl. der Zugehörigkeit von b zu A gemacht werden:

- zunächst der einfachere Fall: $b \in A$

$$\begin{aligned} \#(A \cup B') &= \#(A \cup (B \cup \{b\})) \\ &= \#(A \cup B \cup \{b\}) \\ &\overset{b \in A}{=} \#(A \cup B) \\ &\overset{I.V.}{=} \#A + \#B - \#(A \cap B) \\ &= \#A + \#B + 1 - \#(A \cap B) - 1 \\ &= \#A + \#B + \#\{b\} - (\#(A \cap B) + 1) \\ &\overset{b \in A, b \notin B}{=} \#A + \#(B \cup \{b\}) - \#(A \cap (B \cup \{b\})) \\ &= \#A + \#B' - \#(A \cap B') \end{aligned}$$

- nun der Fall $b \notin A$:

$$\begin{aligned}
\#(A \cup B') &= \#(A \cup (B \cup \{b\})) \\
&= \#((A \cup B) \cup \{b\}) \\
&\stackrel{I.V.}{=} \#(A \cup B) + \#\{b\} - \#((A \cup B) \cap \{b\}) \\
&\stackrel{b \notin A, b \notin B}{=} \#A + \#B - \#(A \cap B) + \#\{b\} - \#(\emptyset) \\
&= \#A + \#B - \#(A \cap B) + \#\{b\} - 0 \\
&= \#A + \#B + \#\{b\} - \#(A \cap B) \\
&= \#A + \#(B \cup \{b\}) - \#(A \cap B) \\
&\stackrel{b \notin A, b \notin B}{=} \#A + \#(B \cup \{b\}) - \#(A \cap (B \cup \{b\})) \\
&= \#A + \#(B') - \#(A \cap B')
\end{aligned}$$

4. **Aufgabe** **(5 Punkte)**

Definition der Addition:
(I) $a + 0 = a$
(II) $a + (b + 1) = (a + b) + 1$

Beweis durch vollständige Induktion über c:

Induktionsanfang: $c = 0$:
$a + (b + c) = a + (b + 0) \stackrel{(I)}{=} a + b \stackrel{(I)}{=} (a + b) + 0 = (a + b) + c.$

Induktionsvoraussetzung:
Für $c \in \mathbb{N}$ gelte: $a + (b + c) = (a + b) + c.$

Induktionsschritt: $c \rightarrow c + 1$

$$\begin{aligned}
a + (b + (c + 1)) &\stackrel{(II)}{=} a + ((b + c) + 1) \\
&\stackrel{(II)}{=} (a + (b + c)) + 1 \\
&\stackrel{(I.V.)}{=} ((a + b) + c) + 1 \\
&\stackrel{(II)}{=} (a + b) + (c + 1)
\end{aligned}$$

5. **Aufgabe** **(4 + 4 Punkte)**

(a) i. $((x_1 \vee (\sim x_3)) \wedge (x_2 \vee x_3))$
$x_1, x_2, x_3 \in B_1$
$(\sim x_3), (x_2 \vee x_3) \in B_2$
$(x_1 \vee (\sim x_3)) \in B_3$
$((x_1 \vee (\sim x_3)) \wedge (x_2 \vee x_3)) \in B_4$
$\Rightarrow$ die Zeichenreihe ist ein vollständig geklammerter Boolescher Ausdruck.

ii. $(\sim (x_1 \wedge \sim (x_2 \wedge \sim x_3)))$
Die Zeichenreihe ist kein vollständig geklammerter Boolescher Ausdruck, da keine Regel für $\sim x_3$ ohne Klammern existiert.

iii. $(x_1 \vee (\sim x_1) \wedge (x_2 \vee (\sim x_2))$
Die Zeichenreihe ist kein vollständig geklammerter Boolescher Ausdruck, da sie mehr öffnende als schliessende Klammern beinhaltet.

iv. $(((x_2 \vee 0) \wedge (\sim x_3)) \vee (1 \wedge x_1))$
$0, 1, x_1, x_2, x_3 \in B_1$
$(\sim x_3), (x_2 \vee 0), (1 \wedge x_1) \in B_2$
$((x_2 \vee 0) \wedge (\sim x_3)) \in B_3$
$(((x_2 \vee 0) \wedge (\sim x_3)) \vee (1 \wedge x_1)) \in B_4$
$\Rightarrow$ die Zeichenreihe ist ein vollständig geklammerter Boolescher Ausdruck.

(b) $\varphi(x_1)=0$, $\varphi(x_2)=1$, $\varphi(x_3)=1$

i. $\varphi((\sim x_3)) = \sim \varphi(x_3) = 0$
$\varphi((x_2 \vee x_3)) = \varphi(x_2) \vee \varphi(x_3) = 1$
$\varphi((x_1 \vee (\sim x_3)) = \varphi(x_1) \vee (\sim (\varphi(x_3))) = 0$
$\varphi(((x_1 \vee (\sim x_3)) \wedge (x_2 \vee x_3))) = 0$

iv. $\varphi((\sim x_3)) = \sim \varphi(x_3) = 0$
$\varphi((x_2 \vee 0)) = \varphi(x_2) \vee \varphi(0) = 1$
$\varphi((1 \wedge x_1)) = \varphi(1) \wedge \varphi(x_1) = 0$
$\varphi((x_2 \vee 0) \wedge (\sim x_3))) = 0$
$\varphi((((x_2 \vee 0) \wedge (\sim x_3)) \vee (1 \wedge x_1))) = 0.$

6. **Aufgabe** **(2 + 2 Punkte)**

1. Alternative:

(a) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
Voraussetzung: $0 \vee x = x$ und $1 \vee x = 1$
Fall 1:
$a = 0$
$a \vee (b \wedge c) = 0 \vee (b \wedge c) = (b \wedge c) = (0 \vee b) \wedge (0 \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
Fall 2:
$a = 1$
$a \vee (b \wedge c) = 1 \vee (b \wedge c) = 1 = 1 \wedge 1 = (1 \vee b) \wedge (1 \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

(b) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
Voraussetzung: $0 \wedge x = 0$ und $1 \wedge x = x$
Fall 1:
$a = 0$
$a \wedge (b \vee c) = 0 \wedge (b \vee c) = 0 = 0 \vee 0 = (0 \wedge b) \vee (0 \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
Fall 2:
$a = 1$
$a \wedge (b \vee c) = 1 \wedge (b \vee c) = (b \vee c) = (1 \wedge b) \vee (1 \wedge c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

2. Alternative:

(a) $\underbrace{a \vee \underbrace{(b \wedge c)}_{p}}_{q} = \underbrace{\underbrace{(a \vee b)}_{u} \wedge \underbrace{(a \vee c)}_{v}}_{w}$

a	b	c	p	u	v	q	w
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$\Rightarrow q = w$

(b) $\underbrace{a \wedge \underbrace{(b \vee c)}_{p}}_{q} = \underbrace{\underbrace{(a \wedge b)}_{u} \vee \underbrace{(a \wedge c)}_{v}}_{w}$

a	b	c	p	u	v	q	w
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$\Rightarrow q = w$

7. Aufgabe **(2 + 3 + 4 Punkte)**

(a) Aus der Wertetabelle abzulesen:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1x_2x_3$$

(b) Die vollständige Zerlegung erhält man durch rekursive Anwendung der Definition und anschließendes Einsetzen der gegebenen Funktionswerte:

$$\begin{aligned}
f_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \wedge f(1, x_2, x_3) \vee \overline{x_1} \wedge f(0, x_2, x_3) \\
&= x_1 \wedge (x_2 \wedge f(1,1,x_3) \vee \overline{x_2} \wedge f(1,0,x_3)) \\
&\quad \vee \overline{x_1} \wedge (x_2 \wedge f(0,1,x_3) \vee \overline{x_2} \wedge f(0,0,x_3)) \\
&= x_1 \wedge (x_2 \wedge (x_3 \wedge f(1,1,1) \vee \overline{x_3} \wedge f(1,1,0)) \\
&\qquad \vee \overline{x_2} \wedge (x_3 \wedge f(1,0,1) \vee \overline{x_3} \wedge f(1,0,0))) \\
&\quad \vee \overline{x_1} \wedge (x_2 \wedge (x_3 \wedge f(0,1,1) \vee \overline{x_3} \wedge f(0,1,0)) \\
&\qquad \vee \overline{x_2} \wedge (x_3 \wedge f(0,0,1) \vee \overline{x_3} \wedge f(0,0,0))) \\
&= x_1 \wedge (x_2 \wedge (x_3 \wedge 1 \vee \overline{x_3} \wedge 0) \vee \overline{x_2} \wedge (x_3 \wedge 1 \vee \overline{x_3} \wedge 0)) \\
&\quad \vee \overline{x_1} \wedge (x_2 \wedge (x_3 \wedge 0 \vee \overline{x_3} \wedge 1) \vee \overline{x_2} \wedge (x_3 \wedge 0 \vee \overline{x_3} \wedge 1))
\end{aligned}$$

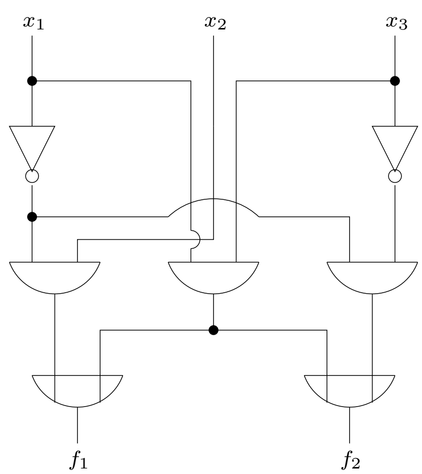
$$\begin{aligned}
&= x_1 \wedge (x_2 x_3 \vee \overline{x_2} x_3) \vee \overline{x_1} \wedge (x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}) \\
&= x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist gerade die vollständige disjunktive Normalform von f_2.

(c) Die vollständigen DNF von f_1 und f_2 haben zu hohe Kosten. Daher muss man eine „billigere“ Lösung suchen. Durch genaue Betrachtung der Wertetabelle kann man erkennen:

$$\begin{aligned}
f_1 &\equiv \overline{x_1} x_2 \vee x_1 x_3 \\
f_2 &\equiv \overline{x_1}\,\overline{x_3} \vee x_1 x_3
\end{aligned}$$

Da man den Teilausdruck $x_1 x_3$ für beide Funktionen verwenden kann, ist es möglich, einen Schaltkreis mit Kosten 7 zu konstruieren:



Anmerkung: Durch die Verwendung von XOR könnte man einen noch günstigeren Schaltkreis konstruieren.

8. **Aufgabe** **(2 + 4 Punkte)**

(a) Der Träger von $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ist die Menge $T_f = \{a \in \{0,1\}^n | f(a) = 1\}$

(b)

$$\begin{aligned}
\bigvee_{a \in T_f} m(a) = 1 &\Leftrightarrow m(b) = 1 \text{ für mindestens ein } b \in T_f \\
&\Leftrightarrow b_i^{x_i} = 1 \text{ für alle } i \in \{n-1, \ldots, 0\} \\
&\Leftrightarrow b_i = x_i \text{ für alle } i \in \{n-1, \ldots, 0\} \\
&\Leftrightarrow b = x \\
&\Leftrightarrow x \in T_f \\
&\Leftrightarrow f(x) = 1
\end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zur 1. Teilklausur Informatik II

(Datum: 21.06.2003)

9. **Aufgabe** **(5 + 5 + 8 Punkte)**

(a) $C(1) = 1, C(n) = C(n-1) + n$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Da sieht man gleich, dass C(n) die Summe ersten n natürlichen Zahlen ist, und die geschlossene Formel dafür, $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$, ist schon in der ersten Aufgabe bewiesen worden. Es kann aber auch der Fall sein, dass man es nicht gleich sieht.

$$\begin{aligned}
C(n) &= C(n-1) + n \\
&= (C(n-2) + (n-1)) + n \\
&= ((C(n-3) + (n-2)) + (n-1)) + n \\
&= (((C(n-4) + (n-3)) + (n-2)) + (n-1)) + n
\end{aligned}$$

Wenn wir das als eine Summenformel schreiben:

$$C(n) = C(n-4) + \sum_{i=0}^{3} n - i$$

Sei nun die Anzahl der Iterationen, die wir gemacht haben k. Wir formen die Formel entsprechend um:

$$C(n) = C(n-k) + \sum_{i=0}^{k-1} n - i$$

Jetzt wollen wir den rekursiven Term eliminieren. Darum wählen wir k so, dass $C(n-k)$ zu dem definierten Fall von C, zu $C(1)$ verwandelt.

$(n - k = 1 \Rightarrow k = n - 1)$

$$\begin{aligned}
C(n) &= C(n-(n-1)) + \sum_{i=0}^{(n-1)-1} n - i \\
&= C(1) + \sum_{i=0}^{n-2} n - i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} n - i \\
&= n^2 + \sum_{i=0}^{n-1} -i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n^2 - \sum_{i=0}^{n-1} i \\
&= n^2 - ((\sum_{i=0}^{n} i) - n) \\
&= n^2 + n - \sum_{i=0}^{n} i
\end{aligned}$$

Wir haben in der ersten Aufgabe bewiesen, dass diese Summenformen sich als $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ schreiben lässt:

$$\begin{aligned}
C(n) &= n^2 + n - \frac{n\cdot(n+1)}{2} \\
&= n\cdot(n+1) - \frac{n\cdot(n+1)}{2} \\
&= \frac{n\cdot(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Die geschlossene Formel haben wir erhalten. Jetzt sollen es zeigen, dass diese Formel für alle n $\in \mathbb{N}$ äquivalent zur Funktion $C(n)$ ist. Und das machen wir per Induktion:

Vollständige Induktion über n:

I.A.: $n = 1$

$$\begin{aligned}
\frac{1\cdot(1+1)}{2} &= \frac{2}{2} \\
&= 1 \\
&\overset{Def}{=} C(1) \checkmark
\end{aligned}$$

I.V.: Sei die Aussage $C(n) = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ wahr für $n \in \mathbb{Z}$.

I.S.: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} &= \frac{n^2+3n+2}{2} \\
&= \frac{(n^2+n)+2n+2}{2} \\
&= \frac{(n^2+n)}{2} + \frac{2n+2}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n + 1 \\
&\overset{I.V.}{=} C(n) + (n+1) \\
&\overset{Def}{=} C(n+1)
\end{aligned}
$$

□

(b) $C(1) = 1, C(n) = C(n/2) + 2$ für $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$.

$$
\begin{aligned}
C(n) &= C(n/2) + 2 \\
&= (C(n/4) + 2) + 2 \\
&= ((C(n/8) + 2) + 2) + 2 \\
&= C(n/2^3) + 3 \cdot 2 \\
&\vdots \\
&= C(n/2^i) + i \cdot 2 \\
&\overset{\text{Sei } i=k}{=} C(n/2^k) + 2 \cdot k \\
&= C(1) + 2k \\
&= 1 + 2k \\
&= 2 \cdot \log_2 n + 1
\end{aligned}
$$

Vollständige Induktion über n:

I.A.: $n = 1$

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \log_2 1 + 1 &= 2 \cdot 0 + 1 \\
&= 1 \\
&\overset{Def}{=} C(1) \checkmark
\end{aligned}
$$

I.V.: Sei $C(n) = 2 \cdot \log_2 n + 1$ für $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$.

I.S.: $n \to 2n$

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \log_2 2n + 1 &= 2 \cdot (\log_2 2 + \log_2 n) + 1 \\
&= 2 \cdot \log_2 2 + (2 \cdot \ log_2 n + 1) \\
&= 2 \cdot 1 + (2 \cdot \ log_2 n + 1) \\
&\overset{I.V.}{=} 2 + C(n)
\end{aligned}
$$

$$\stackrel{Def}{=} \quad C(2n)$$

□

(c) $C(1) = a, C(n) = 2 \cdot C(n/2) + 2 \cdot a$ für $n = 2^k, a, k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
C(n) &= 2 \cdot C(n/2) + 2a \\
&= 2 \cdot (2 \cdot C(n/4) + 2a) + 2a \\
&= 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot C(n/8) + 2a) + 2a) + 2a \\
&= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot C(n/8) + 2 \cdot 2 \cdot 2a + 2 \cdot 2a + 2a \\
&= 2^3 \cdot C(n/2^3) + 2^2 \cdot 2a + 2^1 \cdot 2a + 2^0 \cdot 2a \\
&\vdots \\
&= 2^i \cdot C(n/2^i) + \sum_{j=0}^{i-1} 2a \cdot 2^j \\
&= 2^i \cdot C(n/2^i) + 2a \cdot \sum_{j=0}^{i-1} 2^j \\
&\stackrel{Sei\ i=k}{=} 2^k \cdot C(n/2^k) + 2a \cdot \sum_{j=0}^{k-1} 2^j \\
&= n \cdot C(1) + 2a \cdot \sum_{j=0}^{k-1} 2^j \\
&\stackrel{\ddot{U}B3,A4}{=} n \cdot a + 2a \cdot (2^k - 1) \\
&= a \cdot n + 2a \cdot (n-1) \\
&= a \cdot (n + 2 \cdot (n-1)) \\
&= a \cdot (n + 2n - 2) \\
&= a \cdot (3n - 2)
\end{aligned}$$

Vollständige Induktion über n:

I.A.: $n = 1$

$$\begin{aligned}
a \cdot (3 \cdot 1 - 2) &= a \cdot 1 \\
&= a \\
&\stackrel{Def}{=} C(1) \checkmark
\end{aligned}$$

I.V.: Sei $C(n) = 2 \cdot \log_2 n + 1$ für $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$.

I.S.: $n \to 2n$

$$\begin{aligned} 2a \cdot (3(2n) - 2) &= 6an - 2a \\ &= 6an - 4a + 2a \\ &= 2 \cdot (a \cdot (3n - 2)) + 2a \\ &\overset{I.V.}{=} 2 \cdot C(n) + 2a \\ &\overset{Def}{=} C(2n) \end{aligned}$$

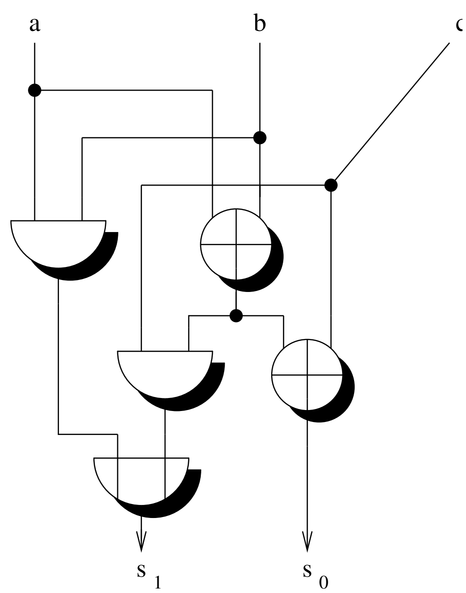
$\square$

10. **Aufgabe** **(2 + 6 + 4 Punkte)**

(a) Ein Addierer ist ein Schaltkreis mit Eingängen $a, b \in \{0,1\}^n,\ c_{-1} \in \{0,1\}$ und Ausgängen $s \in \{0,1\}^{n+1}$, so dass $\langle s \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle + c_{-1}$.

(b) Bsp: Carry-Chain-Adder

Rekursionsanfang: Volladdierer FA.



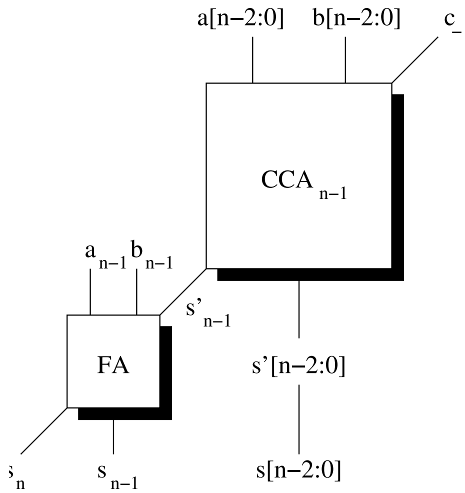
Rekursionsschritt:

Beweis der Korrektheit durch Induktion über die Bitbreite n des Addierers

Induktionsanfang: $n = 1$:

Ein 1-Bit Carry Chain Adder entspricht einem Volladdierer. Die Korrektheit des Volladdierers darf vorausgesetzt werden.

Induktionsvoraussetzung:



$\langle s'[n-1:0]\rangle = \langle a[n-2:0]\rangle + \langle b[n-2:0]\rangle + c_{-1}$

Induktionsschritt: $n-1 \to n$:

$$
\begin{aligned}
\langle a\rangle + \langle b\rangle + c_{-1} &= \langle a[n-1:0]\rangle + \langle b[n-1:0]\rangle + c_{-1}\\
&= a_{n-1}\cdot 2^{n-1} + \langle a[n-2:0]\rangle + b_{n-1}\cdot 2^{n-1} + \langle b[n-2:0]\rangle + c_{-1}\\
&= (a_{n-1}+b_{n-1})\cdot 2^{n-1} + \langle a[n-2:0]\rangle + \langle b[n-2:0]\rangle + c_{-1}\\
&\overset{IV}{=} (a_{n-1}+b_{n-1})\cdot 2^{n-1} + \langle s'[n-1:0]\rangle\\
&= (a_{n-1}+b_{n-1})\cdot 2^{n-1} + s'_{n-1}\cdot 2^{n-1} + \langle s'[n-2:0]\rangle\\
&= (a_{n-1}+b_{n-1}+s'_{n-1})\cdot 2^{n-1} + \langle s[n-2:0]\rangle\\
&\overset{Def.FA}{=} \langle s_n s_{n-1}\rangle\cdot 2^{n-1} + \langle s[n-2:0]\rangle\\
&= \langle s_n s_{n-1} s[n-2:0]\rangle\\
&= \langle s\rangle
\end{aligned}
$$

(c) $C(CCA_n) = C(CCA_n - 1) + C(FA) = n\cdot C(FA) = n\cdot 5$
$D(CCA_n) = D(CCA_n - 1) + D(FA) = n\cdot D(FA) = n\cdot 3$

11. **Aufgabe** **(2 + 4 + 4 Punkte)**

(a)

$$
\begin{aligned}
[0a] &\overset{Def.}{=} -0\cdot 2^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\cdot 2^i\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a_i\cdot 2^i\\
&\overset{Def.}{=} \langle a\rangle
\end{aligned}
$$

(b)

$$
[\overline{b}] + 1 \overset{Def.}{=} -\overline{b}_{n-1}\cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \overline{b}_i\cdot 2^i + 1
$$

$$\begin{aligned}
&= -(1-b_{n-1})\cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2}(1-b_i)\cdot 2^i + 1\\
&= -2^{n-1} + b_{n-1}\cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i - \sum_{i=0}^{n-2} b_i\cdot 2^i + 1\\
&\overset{G.Reihe}{=} -2^{n-1} + b_{n-1}\cdot 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 - \sum_{i=0}^{n-2} b_i\cdot 2^i + 1\\
&= b_{n-1}\cdot 2^{n-1} - \sum_{i=0}^{n-2} b_i\cdot 2^i\\
&= -(-b_{n-1}\cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} b_i\cdot 2^i)\\
&\overset{Def.}{=} -[b]
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\langle a\rangle - \langle b\rangle &\overset{(a)}{=} [0a] - [0b]\\
&\overset{(b)}{=} [0a] + [1\overline{b}] + 1\\
&\overset{Def.}{=} [a] + 2\cdot a_{n-1}\cdot 2^{n-1} + [\overline{b}] - 2\cdot(1-\overline{b}_{n-1})\cdot 2^{n-1} + 1\\
&\overset{Vor.}{=} [s] + a_{n-1}\cdot 2^n - b_{n-1}\cdot 2^n\\
&\overset{Def.}{=} -s_n\cdot 2^n + \sum_{i=0}^{n-1} s_i\cdot 2^i + a_{n-1}\cdot 2^n - b_{n-1}\cdot 2^n\\
&\overset{Def.}{=} \langle s[n-1:0]\rangle + (a_{n-1} - b_{n-1} - s_n)\cdot 2^n
\end{aligned}$$

Aus $\langle a\rangle > \langle b\rangle \Rightarrow 0 < \langle a\rangle - \langle b\rangle < 2^n - 1$ und $0 < \langle s[n-1:0]\rangle < 2^n - 1$ folgt:

$-(2^n - 1) < \langle a\rangle - \langle b\rangle - \langle s[n-1:0]\rangle < 2^n - 1$
$\Rightarrow -2^n + 1 < (a_{n-1} - b_{n-1} - s_n)\cdot 2^n < 2^n - 1$
$\Rightarrow (a_{n-1} - b_{n-1} - s_n) = 0$
$\Rightarrow \langle a\rangle - \langle b\rangle = \langle s[n-1:0]\rangle$

12. **Aufgabe** **(10 + 3 Punkte)**

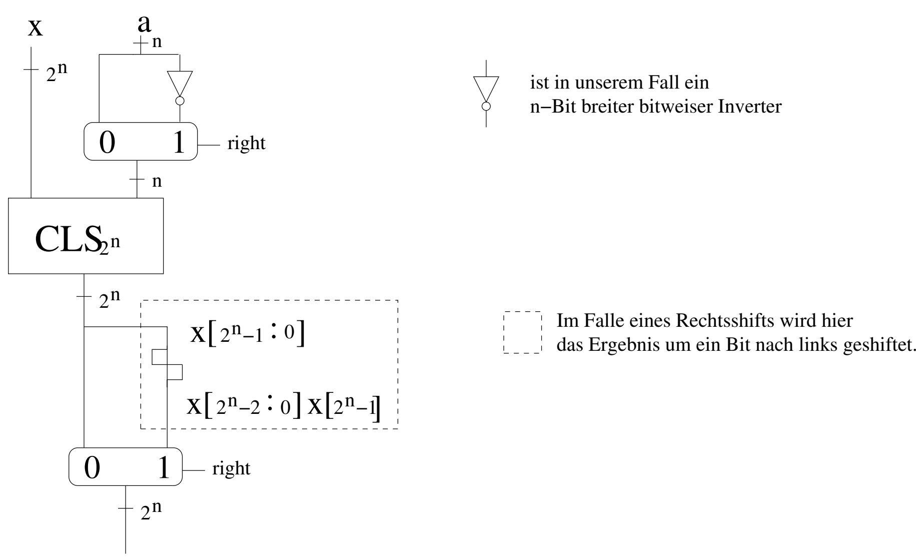
(a) Aus den Forderungen "Kosten $O(n)$ und Tiefe $O(\log n)$" heraus drängt sich die Benutzung eines Parallel-Prefix-Schaltkreises auf.
Sei $a = 0^{n-1-i}10^i$. Wir flippen die Eingabe bitweise zu $a' = 0^i10^{n-1-i}$ Benutzen wir dies als Eingabe für einen PP-$\vee$-Schaltkreis, so erhalten wir als Ausgabe den Bitstring $a'' = 1^{i+1}0^{n-1-i}$ (nach Definition von Parallel Prefix). Dieser String wird dann nocheinmal bitweise geflippt um das gewünschte Ergebnis $0^{n-1-i}1^{i+1}$ zu erhalten.

(b) Wir suchen die vorderste 1 im Bitstring. Nur diese soll bleiben, alle anderen Stellen sollen Null werden. Die vorderste 1 ist aber genau die einzige Stelle des Bitstrings, die sich von ihrer Vorgängerstelle unterscheidet. Zur Überprüfung, ob sich ein Bit von einem anderen Bit unterscheidet, kann man ein *xor*-Gatter benutzen.

$\Rightarrow$ sei $a = 0^{n-1-i}1^{i+1}$ die halbunäre Darstellung, dann ist die unäre Darstellung genau a' mit $a'_i = a_i \; xor \; a_{i+1}$.

13. **Aufgabe** **(5 Punkte)**

Idee: Wir invertieren erst a und dann shiften wir um $\langle \overline{a} \rangle$ nach links, um den Rechtsshift zu realisieren. Dabei wird genau um eine Stelle zuwenig nach links geshiftet. Nach dem Linksshift um $\langle \overline{a} \rangle$ müssen wir das Ergebnis also nocheinmal um ein Bit nach links shiften. Daher ergibt sich der folgende Schaltkreis:



14. **Aufgabe** **(2 + 4 Punkte)**

(a) xor 00011, 00001, 00010 , da GPR(00001) $= 1^{32}$ und $a_i \; xor \; 1 = \overline{a_i}$

(b) sub 00011, 00001, 00010 , da $-1 - [a] = [\overline{a}]$

15. **Aufgabe** **(5 Punkte)**

Lösung mit Fallunterscheidung:

Da die Immediate-Konstante sign-extended wird ist die Unterscheidung abhängig von Bit a_{15}.

1. Fall: $a_{15} = 0$

lhgi 00001, xxxxx, a[31:16]

xori 00010, 00001, a[15:0]

2. Fall: $a_{15} = 1$

lhgi 00001, xxxxx, $\overline{a}$[31:16]

xori 00010, 00001, a[15:0]

Lösungsvorschlag zur 1. Teilklausur Informatik II

(Datum: 21.06.2003)

Lösung ohne Fallunterscheidung:

lhgi 00001, xxxxx, a[31:16]

addiu 00010, 00001, a[15:0]