



6. ÜBUNG ZUR VORLESUNG PROGRAMMIERUNG II, SS 2003

Aufgabe 1: Faire Münzen (10 Punkte)

Angenommen Sie haben eine Münze, bei der Ihnen die Wahrscheinlichkeit $p(\text{Kopf})$ unbekannt ist. Überlegen Sie sich, wie Sie mit dieser Münze durch Kombination mehrerer unfairer Würfe *faire* Würfe simulieren können. Sie dürfen dabei die Münze beliebig oft werfen, um einen fairen Wurf zu simulieren.

Bestimmen Sie zusätzlich den Erwartungswert der Anzahl benötigter Münzwürfe zur Simulation eines fairen Wurfes.

Hinweis: Betrachten Sie zwei aufeinanderfolgende Würfe der unfairen Münze, und versuchen Sie, zwei gleichwahrscheinliche Ereignisse zu identifizieren.

Aufgabe 2: Cauchy-Schwarz für Erwartungswerte (10 Punkte)

Zeigen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Erwartungswerte:

$$(E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2]$$

Gehen Sie dazu folgendermassen vor:

- Zeigen Sie, dass für $P(\{Y = 0\}) = 1$ Cauchy-Schwarz (sogar mit Gleichheit) erfüllt ist.
- Definieren Sie für $P(\{Y = 0\}) \neq 1$ die Funktion $h(a) := E[(X - aY)^2]$ und zeigen Sie, dass $h(a) \geq 0$ und dass $h(a)$ ein Minimum bei $a^* := \frac{E[XY]}{E[Y^2]}$ annimmt.
- Zeigen Sie, dass für $P(\{Y = 0\}) \neq 1$ aus $h(a^*) \geq 0$ die Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt.

Aufgabe 3: Stochastik (10 Punkte)

- (a) Medizinische Testverfahren werden nach zwei Kriterien bewertet: Sensitivität (der Anteil der kranken Patienten, für die der Test die Krankheit erkennt) und Spezifität (der Anteil der gesunden Patienten, die der Test auch als gesund klassifiziert). Bestimmen Sie den sogenannten *positiven Vorhersagewert* eines solchen Tests, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass die Krankheit auch wirklich vorliegt, wenn der Test ein positives Ergebnis zurückliefert, unter Verwendung der folgenden Informationen ($T^+ := \text{Test positiv}$, $K^+ := \text{Krankheit liegt vor}$):

- Spezifizität $P(T^-|K^-)$
- Sensitivität $P(T^+|K^+)$
- Krankheitswahrscheinlichkeit vor Durchführung des Tests $P(K^+)$

- (b) Der in Deutschland gebräuchliche HIV-Test *Elisa* hat einen Sensitivitätswert von 99.7% und eine Spezifizität von 97.0%. Schätzungen besagen, dass in Industrienationen ca. 0.05% der Bevölkerung mit HIV infiziert sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein positiv diagnostizierter Patient tatsächlich mit HIV infiziert?¹

Aufgabe 4: Die Binomialverteilung (10 Punkte)

Eine Zufallsvariable ist *binomialverteilt*, falls gilt:

$$P(\{X = k\}) := \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Bestimmen Sie für festes p , q und n den Erwartungswert $E[X]$ einer binomialverteilten Zufallsvariablen X (z.B. beschreibt ein solches X die Anzahl des Auftretens von Kopf bei n maligem Werfen einer Münze mit $p(\text{Kopf}) = p$, $p(\text{Zahl}) = q$).

Zusatzaufgabe 5: STL, Funktionsobjekte (10 Bonuspunkte)

Implementieren Sie das Verfahren aus Aufgabe 1. Erstellen Sie dazu ein *Funktionsobjekt* namens `FaireMuenze`. Dieses enthält einen Konstruktor `FaireMuenze( double (*f)(), double min, double max )` welchem ein Zufallszahlengenerator f übergeben werden kann, der `double`-Zahlen zwischen `min` und `max` generiert. Der Funktionsoperator `()` der Klasse `FaireMuenze` soll dann unter Zuhilfenahme des übergebenen Zufallszahlengenerators und der Technik aus Aufgabe 1 einen fairen Münzwurf simulieren, und das Ergebnis als `bool`-Variable zurückliefern. Dabei soll `true` für Kopf stehen, `false` für Zahl.

Füllen Sie unter Zuhilfenahme des STL-Algorithmus `generate`² einen `vector<bool> wuerfe(42);` mit einer Sequenz von Münzwürfen. Als Zufallszahlengenerator können Sie hier die Funktion `drand48()` verwenden, die mittels `srand48` initialisiert werden muß.

Abgabe: 06.06.2003

¹In neueren Untersuchungen konnten ca. 95% der befragten Ärzte dies nicht korrekt beantworten!

²Siehe z.B. <http://www.sgi.com/tech/stl/generate.html>