



PROGRAMMIERUNG II, SS 2003 MUSTERLÖSUNG ZUR 4. ÜBUNG

Aufgabe 1: $\mathcal{O}$ -Notation, Teil 1 (10 Punkte)

Sehen wir uns zunächst mal die erste Aussage an:

$$(i) f(x) \in \mathcal{O}(g(x)) \Leftrightarrow g(x) \in \Omega(f(x))$$

Klingt einleuchtend. Also:

zu Zeigen: $f(x) \in \mathcal{O}(g(x)) \Leftrightarrow g(x) \in \Omega(f(x))$

Beweis:

$$\begin{aligned} f(x) &\in \mathcal{O}(g(x)) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \exists c, x_0 \in \mathbb{N}, c > 0, x_0 \geq 0 : \forall x \geq x_0 : 0 \leq f(x) \leq cg(x) \\ &\stackrel{c>0}{\Leftrightarrow} \exists c, x_0 \in \mathbb{N}, c > 0, x_0 \geq 0 : \forall x \geq x_0 : 0 \leq \frac{1}{c}f(x) \leq g(x) \\ &\stackrel{\frac{1}{c}:=c_2>0}{\Leftrightarrow} \exists c, x_0 \in \mathbb{N}, c > 0, x_0 \geq 0 : \forall x \geq x_0 : 0 \leq c_2f(x) \leq g(x) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} g(x) \in \Omega(f(x)) \end{aligned}$$

■

Ganz analog zeigt man übrigens auch $f(x) \in o(x) \Leftrightarrow g(x) \in \omega(f(x))$.

Nehmen wir uns die nächste Behauptung vor:

$$(ii) o(f(x)) \cap \omega(f(x)) = \emptyset$$

zu Zeigen: $o(f(x)) \cap \omega(f(x)) = \emptyset$

Beweis:

Annahme: Sei $o(f(x)) \cap \omega(f(x)) \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists g(x) \in o(f(x)) \cap \omega(f(x)) \\ &\Rightarrow \exists g(x) : g(x) \in o(f(x)) \wedge g(x) \in \omega(f(x)) \\ &\Rightarrow \exists g(x) : \forall c > 0 \exists 0 < x_0 \in \mathbb{N} : \forall x \geq x_0 : 0 \leq f(x) < cg(x) \\ &\quad \wedge \forall c > 0 \exists 0 < x_1 \in \mathbb{N} : \forall x \geq x_1 : 0 \leq cg(x) < f(x) \\ &\stackrel{\tilde{x}:=\max(x_0, x_1)}{\Rightarrow} \exists g(x) : \forall c > 0 \exists 0 < \tilde{x} \in \mathbb{N} : \forall x \geq \tilde{x} : 0 \leq f(x) < cg(x) \wedge 0 \leq cg(x) < f(x) \\ &\Rightarrow \exists g(x) : \forall c > 0 \exists 0 < \tilde{x} \in \mathbb{N} : \forall x \geq \tilde{x} : 0 \leq cg(x) < f(x) < cg(x) \quad \text{!} \\ &\Rightarrow o(f(x)) \cap \omega(f(x)) = \emptyset \end{aligned}$$

■

Wie sieht's mit

$$(iii) f(x) + g(x) \in \Theta(\min(f(x), g(x)))$$

aus? Nehmen wir z.B. $f(x) := x, g(x) := x^2$. Dann ist für $x > 1$ immer $g(x) > f(x)$, also auch immer $f(x) = \min(f(x), g(x))$. Würde die Behauptung gelten, dann wäre also $x + x^2 \in \Theta(x)$. Es gilt natürlich $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+x} = 0$, also auch $x \in o(x^2 + x) \subset \mathcal{O}(x^2 + x)$.

Damit $x + x^2 \in \Theta(x)$ gelten kann, müsste aber auch noch gelten $x^2 + x \in \mathcal{O}(x)$. Das geht natürlich nicht, denn dann müsste ja gelten: $\exists c > 0, x_0 \in \mathbb{N} : \forall x \geq x_0 : 0 \leq x^2 + x < cx$, und da $x > 0$ damit auch $0 \leq 1 + x < c \forall x \geq x_0 \quad \nmid$.

Dies ist offensichtlich nicht erfüllbar, und damit die Aussage per Gegenbeispiel widerlegt!

Nächste Aussage:

$$(iv) f(x) \in \Theta(f(\frac{x}{2}))$$

Sieht auch verdächtig aus... Für Polynome mag's ja noch angehen, aber wie sieht's mit exponentiellen Dingen aus? Betrachten wir mal $\exp(x)$. Für $e^x \in \Theta(e^{\frac{x}{2}})$ bräuchten wir insbesondere $e^x \in \mathcal{O}(e^{\frac{x}{2}})$, also

$$\begin{aligned} & \exists c > 0, x_0 \in \mathbb{N} : \forall x \geq x_0 : 0 \leq e^x < ce^{\frac{x}{2}} \\ \Leftrightarrow & \exists c > 0, x_0 \in \mathbb{N} : \forall x \geq x_0 : 0 \leq e^{\frac{x}{2}} < c \nmid \end{aligned}$$

Dies ist ein offensichtlicher Widerspruch, und damit ist die Aussage per Gegenbeispiel widerlegt!

Bleibt nur noch:

$$(v) g(x) \in o(f(x)) : f(x) + g(x) \in \Theta(f(x))$$

Könnte klappen, da ja $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)+g(x)|}{|f(x)|} = 1$, und damit natürlich auch $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|f(x)+g(x)|} = 1$.

Sieht vernünftig aus. Also:

zu Zeigen: $g(x) \in o(f(x)) : f(x) + g(x) \in \Theta(f(x))$

Beweis:

$$f(x) + g(x) \in \Theta(f(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists c_1 > 0, c_2 > 0, x_0 > 0 : \forall x \geq x_0 : 0 \leq c_1 f(x) \leq f(x) + g(x) \leq c_2 f(x)$$

Allerdings wissen wir, dass $g(x) \in o(f(x))$, und daher $\forall c > 0 \exists x_0 > 0 : \forall x \geq x_0 : 0 \leq g(x) < cf(x)$. Dann gilt also auch: $\forall x \geq x_0 : 0 \leq f(x) \leq g(x) + f(x) \leq f(x) + f(x)$, und damit können wir schließlich folgern:

$$\forall x \geq x_0 : 0 \leq c_1 f(x) \leq f(x) + g(x) \leq 2f(x) \leq c_2 f(x)$$

was für $c_1 = 1, c_2 = 2$ offensichtlich erfüllt ist!

Damit ist die Aussage bewiesen! ■

Aufgabe 2: $\mathcal{O}$ -Notation, Teil 2 (10 Punkte)

(i) zu Zeigen: $x^4 \in o(x^5)$

Beweis:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^4|}{|x^5|} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0 \\ \Rightarrow x^4 &\in o(x^5)\end{aligned}$$

■

(ii) zu Zeigen: $x^4 + 42x^3 \in \Theta(x^4)$

Beweis:

$$\begin{aligned}x^4 + 42x^3 &\in \Theta(x^4) \\ \Leftrightarrow x^4 + 42x^3 &\in \mathcal{O}(x^4) \wedge x^4 + 42x^3 \in \Omega(x^4) \\ \text{(i) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^4 + 42x^3|}{|x^4|} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\frac{|x^4|}{|x^4|}}_{=1} + \underbrace{\frac{42}{|x|}}_{\rightarrow 0} \right) = 1 \\ \Rightarrow x^4 + 42x^3 &\in \mathcal{O}(x^4) \\ \text{(ii) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^4|}{|x^4 + 42x^3|} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|1 + \underbrace{\frac{42}{|x|}}_{\rightarrow 0}|} = 1 \\ \Rightarrow x^4 &\in \mathcal{O}(x^4 + 42x^3) \underset{\text{A1 (i)}}{\Leftrightarrow} x^4 + 42x^3 \in \Omega(x^4) \\ \text{(i) \& (ii)} &\Rightarrow \text{Behauptung}\end{aligned}$$

■

(iii) zu Zeigen: $2x^6 \in \mathcal{O}(x^6) \setminus o(x^6)$

Beweis:

$$\begin{aligned}2x^6 &\in \mathcal{O}(x^6) \setminus o(x^6) \Leftrightarrow 2x^6 \in \mathcal{O}(x^6) \wedge 2x^6 \notin o(x^6) \\ \text{(i) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|2x^6|}{|x^6|} &= 2 \\ \Rightarrow 2x^6 &\in \mathcal{O}(x^6) \\ \text{(ii) } 2x^6 &\in o(x^6) \Leftrightarrow \forall c > 0 \exists x_0 : \forall x \geq x_0 : 0 \leq 2x^6 < cx^6 \\ \text{mit } c = 1 &\Rightarrow \exists x_0 : \forall x \geq x_0 : 0 \leq 2x^6 < x^6 \quad \text{!} \\ \Rightarrow 2x^6 &\notin o(x^6) \\ \text{(i) \& (ii)} &\Rightarrow \text{Behauptung}\end{aligned}$$

■

(iv) zu Zeigen: $\forall a \in \mathbb{N} : e^x \in \omega(x^a)$

Beweis:

Sei $a \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest.

$$\forall a \in \mathbb{N} : e^x \in \omega(x^a) \stackrel{\text{Hinweis in A1 (i)}}{\Leftrightarrow} \forall a \in \mathbb{N} : x^a \in o(e^x)$$

$$\text{Betrachte: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^a|}{|e^x|}.$$

Da $\lim_{x \rightarrow \infty} |x^a| = \lim_{x \rightarrow \infty} |e^x| = \infty$, und x^a, e^x differenzierbar

$\Rightarrow$ L'Hôpital anwendbar!

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^a|}{|e^x|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{dx^a}{dx}}{\frac{de^x}{dx}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^{a-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a!}{e^x} = 0$$

$$\Rightarrow x^a \in o(e^x)$$

$$\Rightarrow e^x \in \omega(x^a)$$

■

(v) zu Zeigen: $\ln(x) \in o(x)$

Beweis:

Da $\ln(x)$ und x differenzierbar und $\lim_{x \rightarrow \infty} |\ln(x)| = \lim_{x \rightarrow \infty} |x| = \infty$

$\Rightarrow$ L'Hôpital für $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|\ln(x)|}{|x|}$ anwendbar!

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|\ln(x)|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d \ln(x)}{dx}}{\frac{dx}{dx}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \ln(x) \in o(x)$$

■

Aufgabe 3: $\mathcal{O}$ -Notation, Teil 3 (10 Punkte)

Anordnung:

$$\ln(\ln(x)), \sqrt{x}, e^x, x!, x^x$$

Begründung:

(Die Anwendbarkeit von L'Hôpital ist hier überall offensichtlich, daher wird nicht mehr gesondert darauf hingewiesen!)

(i)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|\ln(\ln(x))|}{|\sqrt{x}|} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|2\sqrt{x}|}{|x \ln(x)|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|2|}{|\sqrt{x} \ln(x)|} = 0$$

(ii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|\sqrt{x}|}{|e^x|} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|1|}{|2\sqrt{x}e^x|} = 0$$

(iii)

Sei $n \in \mathbb{N}$ die nächstgrößere ganze Zahl zu x .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|e^n|}{|n!|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|\prod_{i=0}^{n-1} e|}{|\prod_{i=0}^{n-1} (n-i)|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{e}{n-i} = 0$$

(iv)

Sei auch hier wieder $n \in \mathbb{N}$ die nächstgrößere ganze Zahl zu x .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|n!|}{|n^n|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|1 \times 2 \times \cdots \times n|}{|n \times n \times \cdots \times n|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|1|}{|n \times \frac{n}{2} \times \cdots \times 1|} = 0$$

Aufgabe 4: Laufzeitberechnung (10 Punkte)

Sei $n = v.size()$; Wir versehen jede Zeile des Codes mit ihren Kosten und mit der Anzahl ihrer Aufrufe im *worst-case*:

	Kosten	Aufrufe
for (j = 1; j < v.size(); j++)	a	n-1
{		
int key = v[j];	b	n-1
int i = j - 1;	c	n-1
while ((i >= 0) && (v[i] > key))	d	$\sum_{j=1}^{n-1} j$
{		
v[i+1] = v[i];	e	$\sum_{j=1}^{n-1} j$
i--;	f	$\sum_{j=1}^{n-1} j$
}		
v[i+1] = key;	g	n-1
}		

Also gilt:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= \underbrace{(a + b + c + g)}_{:=c_1} (n-1) + \underbrace{(d + e + f)}_{:=c_2} \sum_{j=1}^{n-1} j \\
 &= c_1(n-1) + c_2 \frac{n(n-1)}{2} \\
 &= c_1(n-1) + \frac{c_2}{2} n^2 - \frac{c_2}{2} n \\
 &\underbrace{=}_{\frac{c_2}{2} := c_3} c_3 n^2 + (c_1 - c_3)n - c_1
 \end{aligned}$$

Zeigen wir noch schnell, dass $c_3 n^2 + c_4 n - c_1 \in \Theta(n^2)$ für $c_3 > 0$:

zu Zeigen: $c_3 n^2 + c_4 n - c_1 \in \Theta(n^2)$

Aufgabe 5. (Klassenhierarchien Bonuspunkte)

$$\begin{aligned} (i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|c_3 n^2 + c_4 n - c_1|}{|n^2|} &= c_3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|c_4|}{|n|} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|c_1|}{|n^2|} = c_3 \\ &\Rightarrow c_3 n^2 + c_4 n - c_1 \in \mathcal{O}(n^2) \\ \text{Und mit } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} &= c \text{ mit } 0 < c < \infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|g(x)|}{|f(x)|} = \frac{1}{c} \\ &\Rightarrow n^2 \in \mathcal{O}(c_3 n^2 + c_4 n - c_1) \\ &\Rightarrow c_3 n^2 + c_4 n - c_1 \in \Theta(n^2) \end{aligned}$$
