

Aufgabe 1

Rekurrenzgleichung:

$$T(n) = \underbrace{T(n-1)}_{\substack{\text{Sortieren von} \\ [v_1, \dots, v_{n-1}]}} + \underbrace{(n-1)}_{\substack{\text{Einfügen von } v[n] \\ \text{im "worst case"}}}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + (n-1) \\ &= T(n-2) + (n-2) + (n-1) \\ &= T(n-3) + (n-3) + (n-2) + (n-1) \\ &= \dots \\ &= T(1) + (1) + (2) + \dots + (n-2) + (n-1) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} i = \left(\sum_{i=1}^n i \right) - n = \frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= \frac{n^2 + n - 2n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Annahme: } T(n) \in O(n^2) \Rightarrow T(n-1) = c \cdot n^2$$

$$\text{zu zeigen: } T(n) \leq c \cdot n^2$$

Induktionsanfang:

$$T(1) = 0 \text{ (solange sich nur ein Element im vector befindet, so ist nichts zu sortieren)}$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + (n-1) \\ &= c \cdot n^2 + (n-1) \\ &\leq (c+1) \cdot n^2 - 1 \\ &\leq (c+1) \cdot n^2 \quad \forall c \geq 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(n) = T(n-1) + (n-1) \in O(n^2)$$