

Definition [1]:

Sei S eine endliche Menge und sei p eine Abbildung von S in die positiven reellen Zahlen

$$p : S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Für eine Teilmenge $E \subseteq S$ von S sei p definiert als

$$p(E) = \sum_{s \in E} p(s)$$

- (a) (S, p) heißt ein **Wahrscheinlichkeitsraum**, wenn $p(S) = 1$.
- (b) Die endliche Menge S heißt der **Ereignisraum** (sample space).
- (c) Die Funktion p heißt die **Wahrscheinlichkeitsverteilung**.
- (d) Eine Teilmenge E heißt eine **Ereignis** (event).
- (d) Enthält E genau ein Element der Menge S , so sprechen wir von einem **Elementarereignis**.

Beispiel [1]:

Wir betrachten das Beispiel Münzwurf. Nach der Landung der Münze sehen wir entweder die eine Seite der Münze (K = Kopf) oder die andere Seite (Z = Zahl).

$$S = \{K, Z\}$$

Falls es sich bei der Münze um eine faire Münze handelt, erscheinen Kopf und Zahl mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Definieren wir p als

$$p(K) = p(Z) = \frac{1}{2}$$

dann gilt:

$$p(S) = p(K) + p(Z) = 1$$

Somit ist (S, p) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Ereignisraum $S = \{K, Z\}$ und Wahrscheinlichkeitsverteilung p .

Beispiel [2]:

Wir betrachten nun einen Würfel. Nach der Landung des Würfels sehen wir auf der Oberseite des Würfels 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 Punkte.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Falls es sich um einen fairen Würfel handelt, erscheint jede der sechs Zahlen mit der gleichen WSK $1/6$. Definieren wir also p als

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$$

dann gilt:

$$p(S) = \sum_{i=1}^6 p(i) = 6 * \frac{1}{6} = 1$$

Somit ist (S, p) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Ereignisraum $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und Wahrscheinlichkeitsverteilung p .

Wahrscheinlichkeit von Ereignissen $E \subseteq S$:

Betrachten wir eine Teilmenge $E \subseteq S$ von S , d.h., ein Ereignis, so folgt aus der Definition des Ereignisraums bzw. der Wahrscheinlichkeitsverteilung p , dass gilt:

$$p(E) = \sum_{s \in E} p(s)$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E ist also die Summe der WSKen der in E enthaltenen Elementarereignisse. Dies kann wie folgt interpretiert werden.

Das Ereignis E tritt dann auf, wenn das Resultat des zufälligen Prozesses ein in E enthaltenes Elementarereignis ist. Beispiel Würfeln:

$$E = \{1, 6\} \quad p(E) = p(1) + p(6) = \frac{2}{6}$$

Das Ereignis E tritt dann auf, wenn der Wurf eine 1 oder eine 6 liefert. Dies geschieht mit WSK $2/6$.

Beispiel [3]:

Wir werfen eine faire Münze n mal. Das Resultat von n Würfeln ist eine Folge der Länge n der folgenden Form:

$KZZKKKZKZK \dots ZZKZKK$

$$S = \{K, Z\}^n$$

Wie viele verschiedene Elementarereignisse (Folgen von Ks und Zs der Länge n) gibt es?

$$\#S = 2^n$$

Jedes Elementarereignis $e \in S$ tritt mit der gleichen WSK auf:

$$p(e) = \frac{1}{2^n}$$

Es gilt dann:

$$p(S) = \sum_{e \in S} p(e) = 2^n \frac{1}{2^n} = 1$$

Definition [2]:

Gegeben ein WSKraum (S, p) . Eine Funktion, die jedem Elementar-

$$X : S \rightarrow \mathfrak{R}$$

ereignisse e eine reelle Zahl zuordnet, heißt **Zufallsvariable**.

Mittels Zufallsvariablen kann man zum Beispiel jedem Elementarereignis e Kosten zuordnen, die durch das zufällige „Auftreten“ von e verursacht werden. Im folgenden werden wir oft Zufallsvariablen betrachten, deren Kosten den „Laufzeiten“ von Algorithmen (mit einer Zufallskomponente) entsprechen.

Für ein vorgegebenes $x \in \mathfrak{R}$ betrachten wir häufig die Menge aller Elementarereignisse, die durch die Zufallsvariable X auf x abgebildet werden:

$$\{e \in S \mid X(e) = x\}$$

Als Kurzschreibweise für diese Menge verwenden wir

$$\{X = x\}$$

Definition [3]:

Gegeben ein WSKraum (S, p) und eine Zufallsvariable $X: S \rightarrow \mathbb{R}$.
Der Erwartungswert der Zufallsvariablen X ist definiert als:

$$E[X] = \sum_{e \in S} p(e)X(e)$$

Repräsentiert die Zufallsvariable X eine Art Kostenfunktion, so kann der Erwartungswert als die (mittleren) zu erwartenden Kosten interpretiert werden. Siehe folgendes Beispiel:

Wir werfen zweimal hintereinander mit einem Würfel. Die Elementarereignisse sind Paare (a, b) mit $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Die „Kosten“ $X(e)$ eines Elementarereignisses $e = (a, b)$ sind gleich der Summe $a+b$ der Augenzahlen.

$$X(e = (a, b)) = a + b$$

$$p(e = (a, b)) = \frac{1}{36}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{e \in S} p(e)X(e) = \sum_{e \in S} \frac{1}{36}X(e) = \frac{1}{36} \sum_{e \in S} X(e) \\ &= \frac{1}{36} \sum_{a=1}^6 \sum_{b=1}^6 (a+b) = \frac{1}{36} \sum_{a=1}^6 (6a + \sum_{b=1}^6 b) = \frac{1}{36} \sum_{a=1}^6 (6a + 21) \\ &= \frac{12 \cdot 21}{36} = \frac{12 \cdot 7}{12} = 7 \end{aligned}$$

$X(e) = a + b = k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\text{prob}(\{X=k\})$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Man beachte:

$$E[X] = \sum_{e \in S} p(e)X(e) = \sum_{k \in X(S)} p(\{X = k\}) \cdot k$$

Beispiel [4]: Wir werfen eine faire Münze n mal hintereinander.

Die Zufallsvariable X ordnet einem Elementarereignis $e \in S = \{K, Z\}^n$ die Anzahl der Würfe mit Resultat Kopf in e zu.

Wie groß ist die WSK, dass man k Köpfe in einer Folge von n Würfeln erhält, und welchen Wert hat der Erwartungswert $E[X]$ von X ?

$$\begin{aligned}
 p(\{X = k\}) &= \binom{n}{k} 2^{-n} \\
 E[X] &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{-n} k \\
 &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} n 2^{-n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} n 2^{-n} \\
 &= n 2^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n 2^{-n} 2^{n-1} = \frac{n}{2}
 \end{aligned}$$

$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

Satz[1]:

Seien X und Y Zufallsvariablen über dem gleichen Ereignisraum S , dann gilt:

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 E[X + Y] &= \sum_{e \in S} p(e)(X + Y)(e) = \sum_{e \in S} p(e)(X(e) + Y(e)) \\
 &= \sum_{e \in S} p(e)X(e) + \sum_{e \in S} p(e)Y(e) = E[X] + E[Y]
 \end{aligned}$$

Beispiel [5]: 2 Würfe mit einem Würfel

$X: S \rightarrow \mathbb{R}$ bildet ein EE auf die Augensumme ab.

$X_1: S \rightarrow \mathbb{R}$ bildet ein EE auf die Augenzahl des ersten Wurfes ab.

$X_2: S \rightarrow \mathbb{R}$ bildet ein EE auf die Augenzahl des zweiten Wurfes ab.

$$X = X_1 + X_2 \quad \Rightarrow \quad E[X] = E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] = 3.5 + 3.5 = 7$$

Beispiel [6]: n Würfe mit einer fairen Münze: $S = \{K, Z\}^n$.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i\text{-ter Wurf Kopf ist} \\ 0 & \text{falls } i\text{-ter Wurf Zahl ist} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad E[X_i] = 1/2$$

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad \longrightarrow \quad E[X] = n/2$$

Vorsicht: Im allgemeinen ist $E[XY] \neq E[X]E[Y]$. Es gibt jedoch Ausnahmen:

Definition [4]:

Zwei Zufallsvariablen X und Y über dem gleichen Ereignisraum heißen unabhängig, wenn für alle $x, y \in \mathfrak{R}$ gilt:

$$p(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = p(\{X = x\}) * p(\{Y = y\})$$

Satz [2]:

Wenn X und Y unabhängig sind, dann gilt: $E[XY] = E[X]E[Y]$.

Beweis:

$$\begin{aligned} E[XY] &= \sum_{e \in S} p(e)(XY)(e) \\ &= \sum_{z \in \mathfrak{R}} p(\{XY = z\})z \\ &= \sum_{z \in \mathfrak{R}} \sum_{x, y; xy=z} p(\{X = x\} \cap \{Y = y\})xy \\ &= \sum_{x, y} p(\{X = x\} \cap \{Y = y\})xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x,y} \text{prob}(\{X = x\}) * \text{prob}(\{Y = y\})xy \\
&= \sum_x \text{prob}(\{X = x\})x \sum_y \text{prob}(\{Y = y\})y \\
&= E[X]E[Y]
\end{aligned}$$

**Definition [5]:**

Seien A und B Ereignisse mit $p(B) \neq 0$. Wir definieren die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ von A unter der Bedingung (Hypothese) B als

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Die bedingte WSK $p(A|B)$ ist die WSK, dass ein Elementarereignis $e \in A$ eintritt, unter der Annahme, dass die Hypothese B wahr ist, d.h., dass das eintretende Elementarereignis e mit Sicherheit ein Elementarereignis von B ist.

Ist der Durchschnitt $A \cap B$ der Ereignisse A und B leer, so ist $p(A|B) = 0$.

Ist B in A enthalten, so ist $p(A|B) = 1$.

Beispiel [7]: Ein Wurf mit einem Würfel. $A = \{1,2,3\}$ und $B = \{3,4,5\}$.

$$p(A|B) = \frac{p(3)}{p(\{3,4,5\})} = \frac{1}{3}$$

Bezeichnung [1]: Sei $A \subseteq S$ ein Ereignis. Mit A^C bezeichnen wir das komplementäre Ereignis.

$$A^C = S \setminus A = \{e \in S \mid e \notin A\}$$

Satz [3] (Bayes'sche Regel):

Seien A und B Ereignisse (Ereignismengen) mit den folgenden Eigenschaften:

$$p(A) \neq 0 \quad p(B^C) \neq 0 \quad p(B) \neq 0$$

Dann gilt:

$$p(B|A) = \frac{p(B)p(A|B)}{p(B)p(A|B) + p(B^C)p(A|B^C)}$$

Beweis:

$$p(B)p(A|B) = p(B) \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A \cap B) \quad \text{und}$$

$$p(B)p(A|B) + p(B^C)p(A|B^C) = p(A \cap B) + p(A \cap B^C) = p(A)$$

Beispiel [8]:

Gegeben eine faire Münze und eine gefälschte Münze, die immer Kopf zeigt. Wir wählen eine der beiden Münzen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und werfen diese Münze zweimal.

A = zwei Köpfe beobachtet

B = gefälschte Münze gewählt

$$p(A) = p(B)p(A|B) + p(B^C)p(A|B^C) \quad p(B) = \frac{1}{2}$$

$$p(A|B) = 1 \quad p(A|B^C) = \frac{1}{4} \quad p(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

$$p(B|A) = \frac{p(B)p(A|B)}{p(B)p(A|B) + p(B^C)p(A|B^C)} = \frac{1/2 * 1}{1/2 * 1 + 1/2 * 1/4} = \frac{4}{5}$$

Definition [6]:

Sei X eine Zufallsvariable. Dann heißt $\text{Var}[X] := E[(X - E[X])^2]$ die Varianz von X . Die positive Wurzel der Varianz heißt Standardabweichung und wird mit σ bezeichnet.

Beispiel [9]: n Würfe mit einer fairen Münze.

$X_i = 1$, falls der i -te Wurf gleich Kopf ist, und 0 sonst.

$$\text{Var}[X_i] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Lemma [1]:

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Beweis:

$$\begin{aligned} E[(X - E[X])^2] &= E[X^2 - 2E[X]X + (E[X])^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2 \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

**Satz [4]:**

Wenn X und Y unabhängig sind, dann ist $\text{Var}[X+Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{Var}[X + Y] &= E[(X + Y)^2] - (E[X + Y])^2 \\ &= E[X^2 + 2XY + Y^2] - (E[X] + E[Y])^2 \\ &= E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2] - (E[X])^2 - 2E[X]E[Y] - (E[Y])^2 \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 + E[Y^2] - (E[Y])^2 + 2E[XY] - 2E[X]E[Y] \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 + E[Y^2] - (E[Y])^2 + 2E[X]E[Y] - 2E[X]E[Y] \end{aligned}$$

Satz[2]: X und Y unabhängig

Lemma [1] $= \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$

**Beispiel:** n Würfe mit einer fairen Münzen

Sei $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ die Zahl der Köpfe.

Die Zufallsvariablen X_i sind unabhängig. $\rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{4} = \frac{n}{4} \end{aligned}$$

Satz [5] (Markow Ungleichung):

Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable. Dann gilt für alle Konstanten $t \geq 1$:

$$p(\{X \geq t * E[X]\}) \leq \frac{1}{t}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{e \in S} p(e) * X(e) \geq \sum_{e \in S, X(e) \geq tE[X]} p(e) * X(e) \\ &\geq \sum_{e \in S, X(e) \geq tE[X]} p(e) * t * E[X] \\ &= t * E[X] \sum_{e \in S, X(e) \geq tE[X]} p(e) \\ &= t * E[X] * p(\{X \geq t * E[X]\}) \end{aligned}$$

Bemerkung:

Die obige Abschätzung ist sehr schwach. Wenn man etwas über die Varianz weiß, dann kann man bessere Abschätzungen erhalten.

Satz [6] (Chebychev Ungleichung):

$$p(\{|X - E[X]| \geq t\}) \leq \frac{\text{Var}[X]}{t^2}$$

oder

$$p(\{|X - E[X]| \geq t * \sqrt{\text{Var}[X]}\}) \leq \frac{1}{t^2}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= E[(X - E[X])^2] = \sum_{e \in S} p(e)(X - E[X])^2(e) \\ &= \sum_{e \in S} p(e)(X(e) - E[X])^2 \\ &\geq \sum_{e \in S, |X(e) - E[X]| \geq t} p(e) * t^2 = t^2 \sum_{e \in S, |X(e) - E[X]| \geq t} p(e) \\ &= t^2 p(\{|X - E[X]| \geq t\}) \end{aligned}$$

Beispiel: n Würfe mit einer fairen Münzen

Für die Anzahl X der Köpfe gilt: $E[X] = n/2$ und $\text{Var}[X] = n/4$

Damit ist $\sigma = (n/4)^{1/2}$ und daher gilt für $t = 10$:

$$\text{prob}(\{|X - \frac{n}{2}| \geq 5\sqrt{n}\}) \leq \frac{1}{100}$$

Daher ist X mit Wahrscheinlichkeit $1 - (1/100)$ in dem folgenden Intervall:

$$X \in \left[\frac{n}{2} - 5\sqrt{n}, \frac{n}{2} + 5\sqrt{n} \right]$$

Satz [7] (Chernoff Schranke):

Sei X die Anzahl der Köpfe in n Würfeln einer fairen Münze und sei $\varepsilon \geq 0$. Dann gilt:

$$\text{prob}(\{|X - \frac{n}{2}| \geq \varepsilon * \frac{n}{2}\}) \leq 2 * e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{4}}$$

Beweis: Buch von Motwani/Ragharan über Randomized Algorithms. ■

Beispiel: (n faire Münzen) Für $\varepsilon = 10/(n)^{1/2}$ erhalten wir

$$\text{prob}(\{|X - \frac{n}{2}| \geq 5\sqrt{n}\}) \leq 2 * e^{-25}$$

Diese Abschätzung ist erheblich stärker als die Chebychef Schranke.