

Mathematik für Informatiker II - Übungsblatt 7  
Übungsgruppe 1 - Mo, 14-16 Uhr  
Janko Böhm

Jan Hendrik Dithmar - Matrikelnummer 2031259

## Aufgabe 1

$r > 0 \wedge h > 0$  gegeben.

(a)

Zylinder:  $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq r^2 \wedge z \in [0, h]\}$  Betrachte zwecks Transformation der Koordinaten  $x, y, z$  auf Zylinderkoordinaten  $\varrho, \varphi, z$  die Abbildung

$$Z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } Z(\varrho, \varphi, z) = (\varrho \cdot \cos(\varphi), \varrho \cdot \sin(\varphi), z) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

**Funktional-Matrix der Abbildung  $Z$ :**

$$\begin{aligned} DZ(\varrho, \varphi, z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial \varrho} & \frac{\partial \xi_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial \xi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial \varrho} & \frac{\partial \xi_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial \xi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial \varrho} & \frac{\partial \xi_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial \xi_3}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\varrho \cdot \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \varrho \cdot \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \det DZ(\varrho, \varphi, z) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -\varrho \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \varrho \cdot \cos(\varphi) \end{vmatrix} \\ &= \varrho \cdot \cos^2(\varphi) + \varrho \cdot \sin^2(\varphi) \\ &= \varrho(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \\ &= \varrho \end{aligned}$$

Betrachte nun:

$$Z' = \{(\varrho \cdot \cos(\varphi), \varrho \cdot \sin(\varphi), z) \mid \varrho \in [0, r] \wedge \varphi \in [0, 2\pi] \wedge z \in [0, h]\}$$

Dann gilt für  $Vol(Z)$ :

$$\begin{aligned}
 Vol(Z) &= \int_z dV = \int_{z'} \varrho dV' \\
 &= \int_0^h \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^r \varrho d\varrho \right) d\varphi \right) dz \\
 &= \int_0^h \left( \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \varrho^2 \right]_0^r d\varphi \right) dz \\
 &= \int_0^h \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\varphi \right) dz \\
 &= \int_0^h \left[ \frac{1}{2} r^2 \cdot \varphi \right]_0^{2\pi} dz \\
 &= \int_0^h \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\pi dz \\
 &= \pi \cdot r^2 \cdot \int_0^h dz \\
 &= \pi r^2 \cdot [z]_0^h \\
 &= \pi r^2 h
 \end{aligned}$$

Ergebnis:  $Vol(Z) = \pi r^2 h$

(b)

Halbkugel:  $HK = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \wedge z \in [0, r]\}$ .

Betrachte zwecks Transformation der Koordinaten  $x, y, z$  auf Kugelkoordinaten  $\varrho, \varphi, \vartheta$  die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } \Phi(\varrho, \varphi, \vartheta) = (\varrho \cdot \cos(\varphi) \cos(\vartheta), \varrho \cdot \sin(\varphi) \cos(\vartheta), \varrho \cdot \sin(\vartheta))$$

In Übungsblatt 6, Aufgabe 5 wurde bewiesen, dass für die Determinante der Funktional-Matrix  $D\Phi(\varrho, \varphi, \vartheta)$  der Abbildung  $\Phi$  gilt:

$$\det(D\Phi(\varrho, \varphi, \vartheta)) = \varrho^2 \cdot \cos(\vartheta)$$

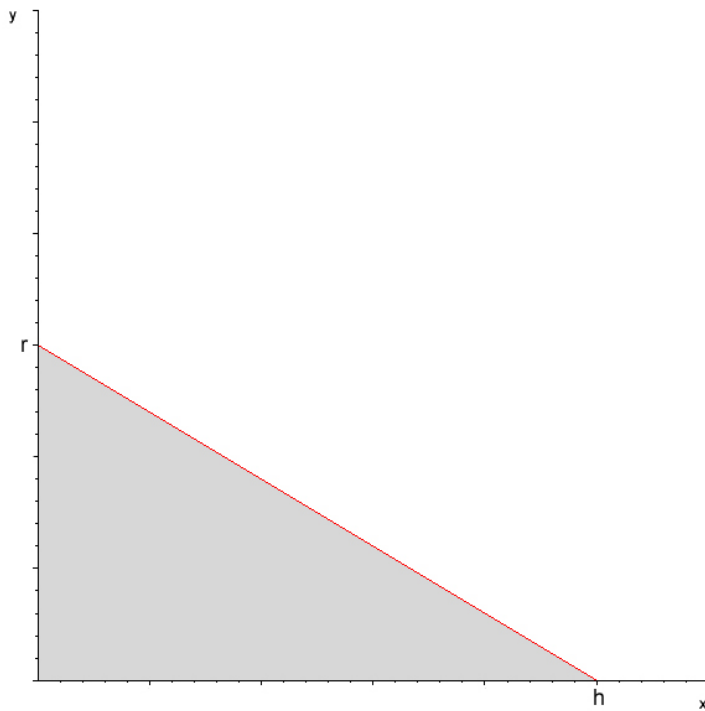
Betrachte nun:

$$HK' = \{(\varrho \cdot \cos(\varphi) \cos(\vartheta), \varrho \cdot \sin(\varphi) \cos(\vartheta), \varrho \cdot \sin(\vartheta)) \mid \varrho \in [0, r] \wedge \varphi \in [0, 2\pi] \wedge \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\}$$

Dann gilt für  $Vol(HK)$ :

$$\begin{aligned}
Vol(HK) &= \int_{HK} dV = \int_{HK'} \varrho^2 \cdot \cos(\vartheta) dV' \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^r \varrho^2 \cdot \cos(\vartheta) d\varrho \right) d\varphi \right) d\vartheta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{3} \varrho^3 \cdot \cos(\vartheta) \right]_0^r d\varphi \right) d\vartheta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} r^3 \cdot \cos(\vartheta) d\varphi \right) d\vartheta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \left( \frac{1}{3} r^3 \cdot \cos(\vartheta) \right) \cdot \varphi \right]_0^{2\pi} d\vartheta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{3} r^3 \cdot \cos(\vartheta) \right) \cdot 2\pi d\vartheta \\
&= \frac{2}{3} \pi r^3 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\vartheta) d\vartheta \\
&= \frac{2}{3} \pi r^3 \cdot \underbrace{[\sin(\vartheta)]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=1} \\
&= \frac{2}{3} \pi r^3
\end{aligned}$$

$$\text{Ergebnis: } Vol(HK) = \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^2 \cdot h \text{ mit } h = r$$



(c)

Die Gerade durch die Punkte  $h$  und  $r$  ist beschrieben durch die Gleichung

$$y = -\frac{r}{h}x + r, \quad x \in [0, h]$$

Rotiert das markierte Dreieck um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskegel mit dem Grundkreisradius  $r$  und der Höhe  $h$ . Für das Kegelvolumen  $Vol(K)$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} Vol(K) &= \pi \cdot \int_0^h y^2 dx \\ &= \pi \cdot \int_0^h \left(-\frac{r}{h}x + r\right)^2 dx \\ &= \pi \left[ \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{h}{r}\right) \left(-\frac{r}{h}x + r\right)^3 \right]_0^h \\ &= -\frac{1}{3} \pi \frac{h}{r} [0 - r^3] \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \end{aligned}$$

$$\text{Ergebnis: } Vol(K) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Aus (a), (b) und (c) folgt:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(Z) : \text{Vol}(HK) : \text{Vol}(K) &= \frac{3}{2}\pi r^2 h : \frac{2}{3}\pi r^2 h : \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= 3 : 2 : 1 \end{aligned}$$

### Aufgabe 3

$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq 4R^2(x^2 + y^2)\}$  mit Radien  $R > r > 0$

Führe folgende Koordinatentransformation durch:

$$\begin{aligned} \Phi : (\varrho, \varphi, \vartheta) &\mapsto (\underbrace{(R + \varrho \cdot \cos(\vartheta))\cos(\varphi)}_{\Phi_1}, \underbrace{(R + \varrho \cdot \cos(\vartheta))\sin(\varphi)}_{\Phi_2}, \underbrace{\varrho \cdot \sin(\vartheta)}_{\Phi_3}) \\ &= (x, y, z) \text{ mit } \varrho \in [0, r], \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} &R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\ &= R^2 - r^2 + (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta))^2 \cdot \cos^2(\varphi) + (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta))^2 \cdot \sin^2(\varphi) + \varrho^2 \cdot \sin^2(\vartheta) \\ &= R^2 - r^2 + (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta))^2 + \varrho^2 \cdot \sin^2(\vartheta) \\ &= R^2 - r^2 + R^2 + 2R\varrho \cdot \cos(\vartheta) + \varrho^2 \cdot \cos^2(\vartheta) + \varrho^2 \cdot \sin^2(\vartheta) \\ &= 2R^2 + 2R\varrho \cdot \cos(\vartheta) + \underbrace{\varrho^2 - r^2}_{\leq 0} \\ &\leq 2R \cdot \underbrace{(R + \varrho \cdot \cos(\vartheta))}_{>0} = 2R \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\text{Also: } R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2 \leq 2R \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\implies (R^2 - r^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq 4R^2 \cdot (x^2 + y^2) \text{ ist erfüllt.}$$

Berechne die Jacobi-Matrix  $D\Phi(\varrho, \varphi, \vartheta)$ :

$$\begin{aligned} D\Phi(\varrho, \varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varrho} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varrho} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varrho} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) & -(R + \varrho \cdot \cos(\vartheta)) \cdot \sin(\varphi) & -\varrho \cdot \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) & (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta)) \cdot \cos(\varphi) & -\varrho \cdot \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) & 0 & \varrho \cdot \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \det(D\Phi(\varrho, \varphi, \vartheta)) &= (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta)) \cdot \varrho \cdot \cos^2(\vartheta) \cdot \cos^2(\varphi) \\
&\quad + (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta)) \cdot \varrho \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot \sin^2(\varphi) \\
&\quad + (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta)) \cdot \varrho \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot \cos^2(\varphi) \\
&\quad + (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta)) \cdot \varrho \cdot \cos^2(\vartheta) \cdot \sin^2(\varphi) \\
&= (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta)) \cdot \varrho \cdot \cos^2(\vartheta) \cdot \underbrace{(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}_{=1} \\
&\quad + (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta)) \cdot \varrho \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot \underbrace{(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi))}_{=1} \\
&= (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta)) \cdot \varrho \cdot \underbrace{(\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta))}_{=1} \\
&= \underbrace{(R + \varrho \cdot \cos(\vartheta))}_{>0} \cdot \varrho \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{Vol}(T) &= \int_T dV = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^r (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta)) \cdot \varrho d\varrho \right) d\varphi \right) d\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^r (R \cdot \varrho + \varrho^2 \cdot \cos(\vartheta)) d\varrho \right) d\varphi \right) d\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} R \cdot \varrho^2 + \frac{1}{3} \varrho^3 \cdot \cos(\vartheta) \right]_0^r d\varphi \right) d\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} R r^2 + \frac{1}{3} r^3 \cdot \cos(\vartheta) \right) d\varphi \right) d\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} R r^2 + \frac{1}{3} r^3 \cdot \cos(\vartheta) \right) \cdot 2\pi d\vartheta \\
&= 2\pi \cdot \left[ \frac{1}{2} R r^2 \cdot \vartheta + \frac{1}{3} r^3 \cdot \sin(\vartheta) \right]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi \cdot \left[ \frac{1}{2} R r^2 \cdot 2\pi \right] \\
&= 2\pi^2 R r^2
\end{aligned}$$

Ergebnis:  $\text{Vol}(T) = 2\pi^2 R r^2$

**Berechnung des Trägheitsmoments des Torus bezgl. der z-Achse:**

$$\begin{aligned}
 m &= \int_T (x^2 + y^2) dx dy dz \\
 x^2 + y^2 &= (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta))^2 \cdot \cos^2(\varphi) + (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta))^2 \cdot \sin^2(\varphi) \\
 &= (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta))^2 \cdot \underbrace{(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}_{=1} \\
 &= (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta))^2 \\
 \Rightarrow m &= \int_T (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_T (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta))^2 dV \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^r (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta))^2 \cdot (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta)) \cdot \varrho d\varrho \right) d\varphi \right) d\vartheta
 \end{aligned}$$

**Berechne zunächst:**

$$\begin{aligned}
 &\int_0^r (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta))^3 \varrho d\varrho \\
 &= \int_0^r (R^3 \cdot \varrho + 3R^2 \varrho^2 \cdot \cos(\vartheta) + 3R \varrho^3 \cdot \cos^2(\vartheta) + \varrho^4 \cos^3(\vartheta)) d\varrho \\
 &= \left[ \frac{1}{2} R^3 \varrho^2 + R^2 \varrho^3 \cdot \cos(\vartheta) + \frac{3}{4} R \varrho^4 \cdot \cos^2(\vartheta) + \frac{1}{5} \varrho^5 \cdot \cos^3(\vartheta) \right]_0^r \\
 &= \frac{1}{2} R^3 r^2 + R^2 r^3 \cdot \cos(\vartheta) + \frac{3}{4} R r^4 \cdot \cos^2(\vartheta) + \frac{1}{5} r^5 \cdot \cos^3(\vartheta) \\
 \Rightarrow &\int_0^{2\pi} \left( \int_0^r (R + \varrho \cdot \cos(\vartheta))^3 \cdot \varrho d\varrho \right) d\varphi \\
 &= 2\pi \cdot \left[ \frac{1}{2} R^3 r^2 + R^2 r^3 \cdot \cos(\vartheta) + \frac{3}{4} R r^4 \cdot \cos^2(\vartheta) + \frac{1}{5} r^5 \cdot \cos^3(\vartheta) \right] \quad (*)
 \end{aligned}$$

Zur weiteren Berechnung werden  $\int_0^{2\pi} \cos^2(\vartheta) d\vartheta$  und  $\int_0^{2\pi} \cos^3(\vartheta) d\vartheta$  benötigt:

$$\begin{aligned}
 \int \cos^2(\vartheta) d\vartheta &= \int \underbrace{\cos(\vartheta)}_{u'} \cdot \underbrace{\cos(\vartheta)}_v d\vartheta \\
 &= \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) - \int \sin(\vartheta) \cdot (-\sin(\vartheta)) d\vartheta \\
 &= \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) + \int (1 - \cos^2(\vartheta)) d\vartheta \\
 \Leftrightarrow 2 \cdot \int \cos^2(\vartheta) d\vartheta &= \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) + \vartheta \\
 \Leftrightarrow \int \cos^2(\vartheta) d\vartheta &= \frac{1}{2} (\vartheta + \sin(\vartheta) \cos(\vartheta))
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\int \cos^3(\vartheta) d\vartheta &= \int \cos(\vartheta) \cdot (1 - \sin^2(\vartheta)) d\vartheta \\
&= \int \cos(\vartheta) d\vartheta - \frac{1}{3} \int 3 \cdot \cos(\vartheta) \cdot \sin^2(\vartheta) d\vartheta \\
&= \sin(\vartheta) - \frac{1}{3} \sin^3(\vartheta)
\end{aligned}$$

$$\text{Also: } \int \cos^3(\vartheta) d\vartheta = \sin(\vartheta) - \frac{1}{3} \sin^3(\vartheta)$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(*)}{\Rightarrow} 2\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} R^3 r^2 + R^2 r^3 \cdot \cos(\vartheta) + \frac{3}{4} R r^4 \cdot \cos^2(\vartheta) + \frac{1}{5} r^5 \cdot \cos^3(\vartheta) \right) d\vartheta \\
&= 2\pi \left[ \frac{1}{2} R^3 r^2 \vartheta + R^2 r^3 \sin(\vartheta) + \frac{3}{4} R r^4 \left( \frac{1}{2} \vartheta + \frac{1}{2} \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \right) + \frac{1}{5} r^5 \left( \sin(\vartheta) - \frac{1}{3} \sin^3(\vartheta) \right) \right]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi \cdot \left[ \frac{1}{2} R^3 r^2 2\pi + \frac{3}{4} R r^4 \frac{1}{2} 2\pi \right] \\
&= 2\pi \cdot \left[ \pi R^3 r^2 + \frac{3}{4} \pi R r^4 \right] \\
&= 2\pi^2 R r^2 \left( R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\text{Ergebnis: } m = \int_T (x^2 + y^2) dx dy dz = \frac{1}{2} \pi^2 R r^2 \cdot [4R^2 + 3r^2]$$

## Aufgabe 4

Ich beweise zunächst den folgenden

**Hilfssatz:** Ist  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung, die im Punkt  $a \in \mathbb{R}^n$  stetig ist, dann existiert zu jeder Umgebung  $V$  von  $F(a)$  eine Umgebung  $U$  von  $a$ , sodass  $F(U) \subset V$  ist.

**Beweis:** Nach Vor. ist  $F$  in  $a$  stetig.

$\Leftrightarrow$  zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , sodass  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x, a\| < \delta$  gilt:

$$\|F(x), F(a)\| < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow$  zu jeder  $\varepsilon$ -Umgebung  $B(F(a), \varepsilon)$  von  $F(a)$  gibt es eine  $\delta$ -Umgebung  $B(a, \delta)$  von  $a$ , sodass  $\forall x \in B(a, \delta)$  gilt:

$$F(x) \in B(F(a), \varepsilon) \quad (*)$$

Sei  $V$  eine beliebige Umgebung von  $F(a)$ .

$\Rightarrow$  es gibt ein  $\varepsilon_0 > 0$ , sodass gilt:  $B(F(a), \varepsilon_0) \subset V$  (1)

$\stackrel{(*)}{\Rightarrow}$  zu jeder  $\varepsilon_0$ -Umgebung  $B(F(a), \varepsilon_0)$  von  $F(a)$  gibt es eine Umgebung  $U$ , etwa  $U := B(a, \delta_0)$  von  $a$ , sodass  $\forall x \in U$  gilt:  $F(x) \in B(F(a), \varepsilon_0)$  (2)

Aus (2) und (1)  $\Rightarrow F(U) \subset B(F(a), \varepsilon_0) \subset V$ , also gilt:

$$F(U) \subset V$$

**Voraussetzung:**  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt.

**Behauptung:**  $F(K)$  ist kompakt.

**Beweis:** Zunächst wird gezeigt:

(I)  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen  $\Rightarrow F^{-1}(V)$  offen

**Beweis:** Sei  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen und sei  $a \in F^{-1}(V)$  beliebig.

$\Rightarrow F(a) \in V$  und  $V$  ist Umgebung von  $F(a)$ , da eine offene Menge Umgebung jedes ihrer Punkte ist. Dann folgt aus dem Hilfssatz:

Zu der Umgebung  $V$  von  $F(a)$  existiert eine Umgebung  $U$  von  $a$ , sodass  $F(U) \subset V$  ist.

$\Rightarrow U \subset F^{-1}(V) \Rightarrow F^{-1}(V)$  ist Umgebung von  $a$ . Wegen  $a \in F^{-1}(V)$  beliebig, ist also  $F^{-1}(V)$  Umgebung jedes ihrer Punkte, d.h.  $F^{-1}(V)$  ist offen.

(II) Nun wird bewiesen, dass  $F(K)$  kompakt ist:

Sei  $K$  eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und sei  $(V_i)_{i \in I}$  eine beliebig vorgegebene offene Überdeckung von  $F(K)$ , d.h.  $F(K) \subset \bigcup_{i \in I} V_i$  und alle  $V_i \subset \mathbb{R}^n$  sind offen.

$\stackrel{(I)}{\Rightarrow} U_i := F^{-1}(V_i)$  sind offen  $\forall i \in I$ . Außerdem:

$$K \subset F^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in I} F^{-1}(V_i) = \bigcup_{i \in I} U_i,$$

also ist  $\bigcup_{i \in I} U_i$  eine offene Überdeckung von  $K$ . Da  $K$  n. Vor. kompakt ist, gib es endlich viele Indizes  $i_1, \dots, i_n \in I$ , sodass  $K \subset \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$ ,

$$\Rightarrow F(K) \subset F\left(\bigcup_{k=1}^n U_{i_k}\right) \subseteq \bigcup_{k=1}^n F(U_{i_k}) = \bigcup_{k=1}^n V_{i_k}.$$

Damit ist gezeigt, dass eine beliebig vorgegebene offene Überdeckung  $\bigcup_{i \in I} V_i$  von  $F(K)$  eine endliche Teilüberdeckung  $\bigcup_{k=1}^n V_{i_k}$  enthält, d.h.  $F(K)$  ist kompakt.  $\square$

## Aufgabe 5

**gegeben:**

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \\ Z_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

**gesucht:** Volumen  $V$  von  $Z_1 \cap Z_2$ .  $\bar{V}$  sei der im nicht-negativen Oktanten liegende Teil des räumlichen Bereichs  $Z_1 \cap Z_2$ .

**Übergang zu Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$ :**

$$x = r \cdot \cos(\varphi); \quad y = r \cdot \sin(\varphi); \quad z = z$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 \leq 1 &\Leftrightarrow r^2 \cdot \cos^2(\varphi) + r^2 \cdot \sin^2(\varphi) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow r^2 \cdot \underbrace{(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}_{=1} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow r^2 \leq 1 \\ &\stackrel{r \geq 0}{\Leftrightarrow} 0 \leq r \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 \leq 1 &\Leftrightarrow r^2 \cdot \cos^2(\varphi) + z^2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow z^2 \leq 1 - r^2 \cdot \cos^2(\varphi) \\ &\stackrel{z \geq 0}{\Leftrightarrow} z \leq \sqrt{1 - r^2 \cdot \cos^2(\varphi)} \end{aligned}$$

$$\bar{V}' = \{(r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi), z) \mid \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \wedge r \in [0, 1] \wedge z \in \left[0, \sqrt{1 - r^2 \cdot \cos^2(\varphi)}\right]\}$$

$\bar{\tau}$  sei das Volumen des im nicht negativen Oktanten des  $xyz$ -Raumes liegenden Bereiches  $\bar{V}$ .

**Dann gilt für das Volumen  $\tau$  von  $V = Z_1 \cap Z_2$ :**

$$\tau = 8 \cdot \bar{\tau}$$

**Es gilt:**

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \int_{\bar{V}} d\bar{\tau} = \int_{\bar{V}'} r d\tau' \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1 - r^2 \cdot \cos^2(\varphi)}} r dz \right) dr \right) d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 [r \cdot z]_0^{\sqrt{1 - r^2 \cdot \cos^2(\varphi)}} dr \right) d\varphi \\ \bar{\tau} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 r \sqrt{1 - r^2 \cdot \cos^2(\varphi)} dr \right) d\varphi \end{aligned}$$

**Löse zuerst:**  $\int_0^1 r \cdot \sqrt{1 - r^2 \cdot \cos^2(\varphi)} dr$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 r \cdot \sqrt{1 - r^2 \cdot \cos^2(\varphi)} dr &= -\frac{1}{3 \cdot \cos^2(\varphi)} \cdot \int_0^1 -3r \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \sqrt{1 - r^2 \cdot \cos^2(\varphi)} dr \\
 &= -\frac{1}{3 \cos^2(\varphi)} \cdot \left[ (1 - r^2 \cdot \cos^2(\varphi))^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\
 &= -\frac{1}{3 \cos^2(\varphi)} \cdot \left[ \underbrace{(1 - \cos^2(\varphi))^{\frac{3}{2}}}_{=\sin^2(\varphi)} - 1 \right] \\
 &= -\frac{1}{3 \cos^2(\varphi)} \cdot \left[ (\sin^2(\varphi))^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2(\varphi)} \cdot (1 - \sin^3(\varphi)) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \sin^3(\varphi)}{1 - \sin^2(\varphi)} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(1 - \sin(\varphi))(\sin^2(\varphi) + \sin(\varphi) + 1)}{(1 - \sin(\varphi))(1 + \sin(\varphi))} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin^2(\varphi) + \sin(\varphi) + 1}{\sin(\varphi) + 1} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{\sin(\varphi) \cdot (1 + \sin(\varphi))}{1 + \sin(\varphi)} + \frac{1}{1 + \sin(\varphi)} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \left( \sin(\varphi) + \frac{1}{1 + \sin(\varphi)} \right) \\
 \Rightarrow \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \sin(\varphi) + \frac{1}{1 + \sin(\varphi)} \right) d\varphi &= \frac{1}{3} \cdot \left[ -\cos(\varphi) - \frac{2}{1 + \tan(\frac{\varphi}{2})} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot [-\cos(\varphi)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \left[ \frac{1}{1 + \tan(\frac{\varphi}{2})} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot \left[ \frac{1}{2} - 1 \right] \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} = \bar{\tau} \\
 \Rightarrow \tau &= 8 \cdot \bar{\tau} = \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$