

Übungsblatt 6
Jan Hendrik Dithmar
Übungsgruppe 1 - Mo, 14-16 Uhr
Janko Böhm

Aufgabe 1

(b)

$$q(x) = 2x_1x_3 + x_2^2 + x_1 + x_2 + x_3 - 1$$

$$q(x) = {}^t xAx + {}^t bx + c$$

$$\text{Mit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } c = -1.$$

- Eigenwerte von A

$$\begin{aligned} \det(A - tE) &= \begin{vmatrix} -t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & -t \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow t^2(1-t) - (1-t) &= (1-t)(t^2 - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (-1)(t-1)^2(t+1) &= 0 \\ t_{1,2} &= 1 \\ t_3 &= -1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -1$.

- Bestimmung von Eigenvektoren w_1, w_2, w_3 zu den Eigenwerte von A , so dass (w_1, w_2, w_3) eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist. 1. $(A - E) \cdot v = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $(A + E) \cdot v = 0$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow v_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow w_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(w_1, w_2, w_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

- Betrachte

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- Man kann nachrechnen, dass

$${}^tSAS = \text{diag}(1, 1, -1) =: D$$

- Ersetze x in $q(x)$ durch Sx :

$$\begin{aligned} q(Sx) &= {}^t(Sx)A(Sx) + {}^tb(Sx) + c \\ q(Sx) &= {}^tx{}^tSASx + ({}^tbS)x + c \\ q(Sx) &= {}^txDx + ({}^tbS)x + c \\ \Rightarrow q(Sx) &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 - 1 \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} {}^tbS &= (1, 1, 1) \cdot S \\ &= (1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{3}{\sqrt{3}}, 0, 0 \right) \\ &= (\sqrt{3}, 0, 0) \end{aligned}$$

- Einsetzen:

$$\begin{aligned}
q(Sx) &= (x_1, x_2, x_3) \cdot \text{diag}(1, 1, -1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (\sqrt{3}, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 1 \\
&= (x_1, x_2, -x_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\sqrt{3}}_{\mu_1} x_1 + \underbrace{0}_{\mu_2} x_2 + \underbrace{0}_{\mu_3} x_3 - 1 \\
q(Sx) &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + \sqrt{3}x_1 - 1 \\
q(Sx) &= \left(x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + x_2^2 - x_3^2 - \frac{7}{4} \\
q\left(S\left(x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

$$\text{Sei } S \begin{pmatrix} x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow q(x') &= x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - \frac{7}{4} \\
\Rightarrow Q_2 &= \{x' \in \mathbb{R}^3 \mid x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - \frac{7}{4} = 0\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 &= \frac{7}{4} \\
\frac{x_1'^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} + \frac{x_2'^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} - \frac{x_3'^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} &= 1 \\
\Rightarrow Q_2 &= \{x' \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1'^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} + \frac{x_2'^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} - \frac{x_3'^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = 1\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}z^2 = 1\}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x, y, z) = x + y + z$$

Sei $g(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}z^2 - 1$. Dann ist $x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}z^2 = 1 \Leftrightarrow g(x, y, z) = 0$.

Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned}
L(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) + \lambda \cdot g(x, y, z); \quad ((x, y, z), \lambda) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \\
L(x, y, z, \lambda) &= x + y + z + \lambda \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}z^2 - 1\right)
\end{aligned}$$

Bilde:

$$\begin{aligned}
D_x L &= \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x \\
D_y L &= \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + \frac{1}{2}\lambda y \\
D_z L &= \frac{\partial L}{\partial z} = 1 - \frac{1}{2}\lambda z \\
D_\lambda L &= \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}z^2 - 1 = g(x, y, z)
\end{aligned}$$

Das folgende System ist zu lösen:

$$1 + 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$1 + \frac{1}{2}\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$1 - \frac{1}{2}\lambda z = 0 \quad (3)$$

$$g(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}z^2 - 1 = 0 \quad (4)$$

Aus (1), (2) und (3) folgt, dass gelten muss:

$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0$$

Aus (3):

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2}\lambda z = 0 &\Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{z} \\
\lambda = \frac{2}{z} \text{ in (1)} \Rightarrow 1 + 2\frac{2}{z}x = 0 &\Leftrightarrow 1 + \frac{4x}{z} = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{z}{4} \\
\lambda = \frac{2}{z} \text{ in (2)} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2}\frac{2}{z}y = 0 &\Leftrightarrow 1 + \frac{y}{z} = 0 \\
&\Leftrightarrow y = -z
\end{aligned}$$

$x = -\frac{7}{4} \wedge y = -z$ in (4) einsetzen:

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{7}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}(-z)^2 - \frac{1}{4}z^2 - 1 &= 0 \\
\frac{1}{16}z^2 + \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{4}z^2 - 1 &= 0 \\
&\Leftrightarrow z^2 = 16 \\
&\Leftrightarrow |z| = 4 \\
&\Leftrightarrow z = 4 \\
\vee z &= -4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_1 &= 4 & z_2 &= -4 \\
x_1 &= -1 & x_2 &= 1 \\
y_1 &= -4 & y_2 &= 4 \\
\lambda_1 &= \frac{1}{2} & \lambda_2 &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Setze $z_{1,2} = \pm 4$ in $g(x, y, z) = 0$ ein:

$$g(x, y, \pm 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 5 = 0\}$$

Für $z_1 = 4$ ist $q_1 = (x_1, y_1) = (-1, -4) \in Q$ ein möglicher Extrempunkt von

$$f(x, y, 4) = x + y + 4 =: f_1(x, y)$$

Für $z_2 = -4$ ist $q_2 = (x_2, y_2) = (1, 4) \in Q$ ein möglicher Extrempunkt von

$$f(x, y, -4) = x + y - 4 =: f_2(x, y)$$

Vorbetrachtung:

Es gilt: $f_1(-1, -4) = -1 + (-4) + 4 = -1$

$$\begin{aligned} (x, y) \in Q \text{ beliebig} &\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 5 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{20} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{5})^2} = 1 \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse mit Mittelpunkt $M(0|0)$ und den Halbachsen $a = \sqrt{5}$ und $b = 2\sqrt{5}$. Deshalb gilt:

$$|x| \leq \sqrt{5} \wedge |y| \leq 2\sqrt{5}$$

(I) Zeige, dass $q_1 = (-1, -4)$ isoliertes Minimum von f_1 auf $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 5\}$ ist:

1. Fall: Seien $x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \wedge y \in [0, 2\sqrt{5}]$:

$$\Rightarrow f_1(x, y) = x + y + 4 \geq -\sqrt{5} + 0 + 4 = 4 - \sqrt{5} > -1$$

also ist:

$$f_1(x, y) > f_1(-1, -4)$$

2. Fall: Seien $x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \wedge y \in [-2\sqrt{5}, 0]$:

Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 5 &\Leftrightarrow y^2 = 4 \underbrace{(5 - x^2)}_{\geq 0} \\ &\Leftrightarrow |y| = 2\sqrt{5 - x^2} \\ &\Leftrightarrow -y = 2\sqrt{5 - x^2} \quad (*) \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
5(x+1)^2 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow 5x^2 + 10x + 5 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 &\geq 20 - 4x^2 \\
\Leftrightarrow \underbrace{(x+5)^2}_{>0} &\geq 4\underbrace{(5-x^2)}_{\geq 0} \\
\Leftrightarrow x+5 &\geq 2\sqrt{5-x^2} \\
\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} x+5 &\geq -y \\
\Leftrightarrow x+y+4 &\geq -1 \\
\Leftrightarrow f_1(x,y) &\geq f_1(-1,-4)
\end{aligned}$$

Ergebnis (I): Da $f_1(x,y) = f_1(-1,-4)$ nur für $(x,y) = (-1,-4)$ auftritt, ist (gemäß Fall 1 und Fall 2 aus (I)) der Punkt $q_1 = (-1,-4)$ ein isoliertes Minimum von $f_1 = f(x,y,4)$ auf Q mit dem Minimumwert -1 .

(II) Zeige, dass $q_2 = (1,4)$ isoliertes Maximum von f_2 auf $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 5\}$ ist. Es gilt:

$$f_2(1,4) = 1 + 4 - 4 = 1$$

1. Fall: Sei $x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \wedge y \in [-2\sqrt{5}, 0]$:

$$\Rightarrow f_2(x,y) = x + y - 4 \leq \sqrt{5} + 0 - 4 = \sqrt{5} - 4 < 1$$

also:

$$f_2(x,y) < f_2(1,4)$$

2. Fall: Seien $x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \wedge y \in [0, 2\sqrt{5}]$:

Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 5 &\Leftrightarrow y^2 = 4\underbrace{(5-x^2)}_{\geq 0} \\
&\Leftrightarrow |y| = 2\sqrt{5-x^2} \\
&\Leftrightarrow y = 2\sqrt{5-x^2} \quad (**)
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
5(x-1)^2 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow 5x^2 - 10x + 5 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 &\geq 20 - 4x^2 \\
\Leftrightarrow \underbrace{(5-x)^2}_{>0} &\geq 4 \underbrace{(5-x^2)}_{\geq 0} \\
\Leftrightarrow 5-x &\geq 2\sqrt{5-x^2} \\
\stackrel{(**)}{\Leftrightarrow} 5-x &\geq y \\
\Leftrightarrow -x-y+4 &\geq -1 \\
\Leftrightarrow x+y-4 &\leq 1 \\
\Leftrightarrow f_2(x,y) &\leq f_2(1,4)
\end{aligned}$$

Ergebnis (II): Da $f_2(x, y) = f_2(1, 4)$ nur für $(x, y) = (1, 4)$ auftritt, ist (gemäß Fall 1 und Fall 2 aus (II)) der Punkt $q_2 = (1, 4)$ ein isoliertes Maximum von $f_2 = f(x, y, -4)$ auf Q mit dem Maximumwert 1.

Aufgabe 3

$$x^3 + y^3 - 1 = 0 \quad \text{Punkt } p = (0, 1)$$

Betrachte die Funktion

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 1$$

Es gilt: F ist in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für $p = (0, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt: $F(0, 1) = 0$; $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}((0, 1)) = 3 \neq 0$

$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}((0, 1))$ besitzt ein Inverses, d.h. die 1×1 -Matrix $(\frac{\partial F}{\partial y}((0, 1)))$ ist invertierbar.

$\Rightarrow$ die implizierte Gleichung $x^3 + y^3 - 1 = 0$ (*) lässt sich im Punkt $p = (0, 1)$ nach y auflösen.

Bemerkung: (*) lässt sich in $p = (0, 1)$ nicht nach x auflösen, denn: $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}((0, 1)) = 0$.

$$\begin{aligned}
x^3 y^3 - 1 = 0 &\Leftrightarrow y^3 = 1 - x^3 \\
&\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{1 - x^3} = (1 - x^3)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Sei $f(x) := \sqrt[3]{1-x^3} \Rightarrow f(0) = 1$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{3} (1-x^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-3x^2) = -\frac{x^2}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} \\
 \Rightarrow f'(0) &= 0 \\
 \Rightarrow f''(x) &= -\frac{2x(1-x^3)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}(1-x^3)^{-\frac{1}{3}}(-3x^2)}{(1-x^3)^{\frac{4}{3}}} \\
 &= -\frac{2x(1-x^3) + 2x^4}{(1-x^3)^{\frac{5}{3}}} \\
 &= -2\frac{x}{(1-x^3)^{\frac{5}{3}}} \\
 \Rightarrow f''(0) &= 0 \\
 f'''(x) &= -2\frac{1(1-x^3)^{\frac{5}{3}} - x \cdot \frac{5}{3} \cdot (1-x^3)^{\frac{2}{3}} \cdot (-3x^2)}{(1-x^3)^{\frac{10}{3}}} \\
 &= -2\frac{1-x^3+5x^3}{(1-x^3)^{\frac{8}{3}}} \\
 &= -2\frac{4x^3+1}{(1-x^3)^{\frac{8}{3}}} \\
 \Rightarrow f'''(0) &= -2
 \end{aligned}$$

Taylorpolynom von $f(x)$ in $x_0 = 0$ bis zum Grad 3:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \\
 &= f(0) + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 \\
 f(x) &= 1 - \frac{1}{3}x^3
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = 4x^2 - xy$$

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + y^2 \leq 1\}$$

1. Betrachte zunächst $\overset{\circ}{M} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9x^2 + y^2 < 1\}$

$$\begin{aligned}
 D_x f &= \frac{\partial f}{\partial x} = 8x - y \\
 D_y f &= \frac{\partial f}{\partial y} = -x
 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung: $D_x f = 0 \wedge D_y f = 0$

$$D_y f = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Einsetzen in } D_x f = 0 \Rightarrow y = 0$$

$\Rightarrow p_0 = (0, 0) \in \overset{\circ}{M}$ ist möglicher Extrempunkt von f .

$$D_x^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8$$

$$D_y^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$D_x D_y f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1 = D_y D_x f$$

$$\Rightarrow (Hesse f)(p_0) = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist indefinit, denn:}$$

$$\det((Hesse f)(p_0) - t \cdot E_2) = \det \begin{pmatrix} 8-t & -1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} = (8-t)(-t) - (-1)^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 8t - 1 = 0 \Rightarrow t_{1/2} = 4 \pm \sqrt{17}$$

Folglich besitzt $(Hesse f)(p_0)$ die Eigenwerte $\lambda_1 = 4 + \sqrt{17} > 0$ und $\lambda_2 = 4 - \sqrt{17} < 0$

$\Rightarrow f$ besitzt in $p_0 = (0, 0)$ kein lokales Extremum.

2. Betrachte nun den Rand von M :

$\partial M = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid 9x^2 + y^2 = 1\}$. Sei $g(x, y) = 9x^2 + y^2 - 1$. Dann ist $9x^2 + y^2 = 1$.

Die Lagrange-Funktion lautet: $g(x, y) = 0$.

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$L(x, y, \lambda) = 4x^2 - xy + \lambda \cdot (9x^2 + y^2 - 1)$$

$$D_x L = \frac{\partial L}{\partial x} = 8x - y + 18\lambda x = 0 \tag{5}$$

$$D_y L = \frac{\partial L}{\partial y} = -x + 2\lambda y = 0 \tag{6}$$

$$D_\lambda L = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \underbrace{9x^2 + y^2 - 1}_{=g(x,y)} = 0 \tag{7}$$

Aus (2): $2\lambda y = x$

1. Fall: $y = 0 \Rightarrow x = 0$, aber $g(0, 0) = -1$. Somit erfüllt $(x, y) = (0, 0)$ nicht die Bedingung $g(x, y) = 0$

2. Fall: $y \neq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{x}{2y}$.

$$\begin{aligned}
\text{in (1): } 8x - y + 18 \frac{x}{2y} &= 0 \\
16xy - 2y^2 + 18x^2 &= 0 \\
8xy - y^2 + 9x^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow y^2 - 8xy - 9x^2 &= 0 \\
y_{1/2} = 4x \pm \sqrt{16x^2 + 9x^2} &= 4x \pm \sqrt{25x^2} \\
y_{1/2} &= 4x \pm 5 \cdot |x| \\
\text{Für } x \geq 0: y_{1/2} &= 4x \pm 5x \\
\Leftrightarrow y &= 9x \\
\vee y &= -x \\
\text{Für } x < 0: y_{1/2} &= 4x \mp 5x \\
\Leftrightarrow y &= -x \\
\vee y &= 9x
\end{aligned}$$

(I) Für $y = 9x$ folgt aus (3): $9x^2 + 81x^2 - 1 = 0$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 90x^2 = 1 &\Leftrightarrow x^2 = \frac{10}{900} \Leftrightarrow |x| = \frac{1}{30} \cdot \sqrt{10} \\
x_1 = \frac{1}{30}\sqrt{10} &\quad x_2 = -\frac{1}{30}\sqrt{10} \\
\Rightarrow y_1 = 9x_1 = \frac{3}{10}\sqrt{10} &\quad y_2 = 9x_2 = -\frac{3}{10}\sqrt{10}
\end{aligned}$$

Also:

$p_1 = (x_1, y_1) = (\frac{1}{30}\sqrt{10}, \frac{3}{10}\sqrt{10})$ und $p_2 = (x_2, y_2) = (-\frac{1}{30}\sqrt{10}, -\frac{3}{10}\sqrt{10}) = (-x_1, -y_1)$ sind mögliche Extrempunkte von f auf ∂M .

$$\begin{aligned}
f(x_1, y_1) &= 4x_1^2 - x_1y_1 \\
&= 4\frac{1}{90} - \frac{1}{30}\sqrt{10} \cdot \frac{3}{10}\sqrt{10} \\
&= \frac{4}{90} - \frac{3}{30} = \frac{4-9}{90} = -\frac{5}{90} = -\frac{1}{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x_2, y_2) &= 4x_2^2 - x_2y_2 \\
&= 4(-x_1)^2 - (-x_1)(-y_1) \\
&= 4x_1^2 - x_1y_1 = -\frac{1}{18}
\end{aligned}$$

Zeige nun, dass $p_1 = (x_1, y_1)$ und $p_2 = (x_2, y_2)$ isolierte Minima von f auf dem Rand von M sind:

Sei $(x, y) \in \partial M$ beliebig $\Leftrightarrow 9x^2 + y^2 = 1$ (*). Es gilt:

$$\begin{aligned}
(9x - y)^2 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow 81x^2 - 18xy + y^2 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow 72x^2 - 18xy + 9x^2 + y^2 &\geq 0 \\
&\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} 72x^2 - 18xy + 1 \geq 0 \\
\Leftrightarrow 4x^2 - xy + \frac{1}{18} &\geq 0 \\
\Leftrightarrow 4x^2 - xy &\geq -\frac{1}{18} \\
\Leftrightarrow f(x, y) &\geq -\frac{1}{18}
\end{aligned}$$

und somit $f(x, y) \geq f(x_1, y_1) \wedge f(x, y) \geq f(x_2, y_2)$.

Ergebnis (I):

Da $f(x, y) = f(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2$) nur für die Punkte $p_1 = (\frac{1}{30}\sqrt{10}, \frac{3}{10}\sqrt{10})$ und $p_2 = (-\frac{1}{30}\sqrt{10}, -\frac{3}{10}\sqrt{10})$ isolierte (lokale) Minima von f auf ∂M , jeweils mit dem Minimumwert $-\frac{1}{18}$.

(II) Für $y = -x$ folgt aus (3): $9x^2 + (-x)^2 - 1 = 0$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 10x^2 = 1 &\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{10} = \frac{10}{100} \\
\Leftrightarrow |x| = \frac{1}{10}\sqrt{10} \\
x_3 = \frac{1}{10}\sqrt{10} &\quad x_4 = -\frac{1}{10}\sqrt{10} \\
\Rightarrow y_3 = -x_3 = -\frac{1}{10}\sqrt{10} &\quad y_4 = -x_4 = \frac{1}{10}\sqrt{10}
\end{aligned}$$

Also:

$p_3 = (x_3, y_3) = (\frac{1}{10}\sqrt{10}, -\frac{1}{10}\sqrt{10})$ und $p_4 = (x_4, y_4) = (-\frac{1}{10}\sqrt{10}, \frac{1}{10}\sqrt{10}) = (-x_3, -y_3)$ sind mögliche Extrempunkte von f auf ∂M .

$$\begin{aligned}
f(x_3, y_3) &= 4x_3^2 - x_3y_3 \\
&= 4\frac{1}{10} - \frac{1}{10}\sqrt{10} \cdot \left(-\frac{1}{10}\sqrt{10}\right) \\
&= \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} = f(x_4, y_4)
\end{aligned}$$

Zeige nun, dass $p_3 = (x_3, y_3)$ und $p_4 = (x_4, y_4)$ isolierte Maxima von f auf dem Rand von M sind:

Sei $(x, y) \in \partial M$ beliebig $\Leftrightarrow 9x^2 + y^2 = 1$ (**). Es gilt:

$$\begin{aligned}
(-x - y)^2 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow x^2 - 9x^2 + 2xy + 9x^2 + y^2 &\geq 0 \\
\stackrel{(**)}{\Leftrightarrow} -8x^2 + 2xy + 1 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow 4x^2 - xy &\leq \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow f(x, y) &\leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

und somit $f(x, y) \leq f(x_3, y_3) \wedge f(x, y) \leq f(x_4, y_4)$.

Ergebnis (II):

Da $f(x, y) = f(x_j, y_j)$ ($j = 3, 4$) nur für $(x, y) = (x_j, y_j)$ auftritt, sind die Punkte $p_3 = (\frac{1}{10}\sqrt{10}, -\frac{1}{10}\sqrt{10})$ und $p_4 = (-\frac{1}{10}\sqrt{10}, \frac{1}{10}\sqrt{10})$ isolierte (lokale) Maxima von f auf ∂M , jeweils mit dem Maximumwert $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 5

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned}
\Phi(r, \varphi, \vartheta) &= (r \cdot \cos(\varphi) \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\varphi) \cos(\vartheta), r \cdot \sin(\vartheta)) \\
&= (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)
\end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix (Funktional-Matrix) der Abbildung Φ ist:

$$\begin{aligned}
D\Phi(r, \varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\vartheta) & -r \cdot \sin(\varphi) \cos(\vartheta) & -r \cdot \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \cos(\vartheta) & r \cdot \cos(\varphi) \cos(\vartheta) & -r \cdot \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & 0 & r \cdot \cos(\vartheta) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \det(D\Phi(r, \varphi, \vartheta)) &= r^2 \cos^2(\varphi) \cos^3(\vartheta) + r^2 \sin^2(\varphi) \sin^2(\vartheta) \cos(\vartheta) \\
&\quad + r^2 \cos^2(\varphi) \sin^2(\vartheta) \cos(\vartheta) + r^2 \sin^2(\varphi) \cos^3(\vartheta) \\
&= r^2 \cos^3(\vartheta) \underbrace{(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}_{=1} \\
&\quad + r^2 \sin^2(\vartheta) \cos(\vartheta) \underbrace{(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi))}_{=1} \\
&= r^2 \cos^3(\vartheta) + r^2 \sin^2(\vartheta) \cos(\vartheta) \\
&= r^2 \cos(\vartheta) \underbrace{(\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta))}_{=1} \\
&= r^2 \cos(\vartheta)
\end{aligned}$$

Es gilt: Φ ist im Punkt $(r_0, \varphi_0, \vartheta_0) \in \mathbb{R}^3$ nicht lokal umkehrbar.
 $\Leftrightarrow Df(r, \varphi, \vartheta)$ ist im Punkt $(r_0, \varphi_0, \vartheta_0) \in \mathbb{R}^3$ nicht invertierbar.
 $\Leftrightarrow \det(D\Phi(r_0, \varphi_0, \vartheta_0)) = 0$

$$\begin{aligned} \det(D\Phi(r, \varphi, \vartheta)) = 0 &\Leftrightarrow r^2 \cos(\vartheta) = 0 \\ &\Leftrightarrow r = 0 \vee \cos(\vartheta) = 0 \\ &\Leftrightarrow r = 0 \vee \vartheta_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow r = 0 \vee \vartheta_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ergebnis:

Die Kugelkoordinatenabbildung Φ ist in den Punkten der Menge

$$\{(r, \varphi, \vartheta_k) \in \mathbb{R}^3 \mid r = 0 \vee \vartheta_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

nicht lokal umkehrbar.