

Übungsblatt 5
Jan Hendrik Dithmar
Übungsgruppe 1 - Mo, 14-16 Uhr
Janko Böhm

Vorbemerkungen zu den Aufgaben 1 und 2:

1. Seien $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Durch die Abbildung
$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto d(x, y) \text{ mit } d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$
ist auf dem $\mathbb{R}^n$ eine Metrik erklärt und $(\mathbb{R}^n, d)$ ist dadurch ein metrischer Raum.
2. Sei $x \in \mathbb{R}^n$, sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Definiere

$$K(x, \varepsilon) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

die offene Kugel mit Mittelpunkt x und Radius ε (bezüglich der Metrik d).

3. Def.: Sei $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus $\mathbb{R}^n$. Die Folge (x_ν) heißt konvergent gegen den Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = x$, wenn gilt:
zu jeder Umgebung U von x gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_\nu \in U \forall \nu \geq N$.
 $\Leftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_\nu, x) < \varepsilon \forall \nu \geq N$.

Aufgabe 1

(a)

Vor.: $U_i \subset \mathbb{R}^n, i \in I$ eine Familie von offenen Mengen

Beh.: $\bigcup_{i \in I} U_i$ ist offen

Bew.:

Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow$ es gibt mindestens ein $j \in I$ mit $x \in U_j$.

U_j ist nach Vor. offen $\Rightarrow$ es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass $K(x, \varepsilon) \subset U_j$.

Wegen $U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow K(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, d.h. $\bigcup_{i \in I} U_i$ ist offen.

(b)

Vor.: $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen

Beh.: $U_1 \cap U_2$ offen

Bew.:

$x \in U_1 \cap U_2 \Leftrightarrow x \in U_1 \wedge x \in U_2$.

Da $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ offen sind, gibt es $\varepsilon_1 > 0$ und $\varepsilon_2 > 0$, sodass gilt:

$$K(x, \varepsilon_1) \subset U_1 \wedge K(x, \varepsilon_2) \subset U_2$$

Sei $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

$$\Rightarrow K(x, \varepsilon) \subset K(x, \varepsilon_1) \subset U_1$$

$$\wedge K(x, \varepsilon) \subset K(x, \varepsilon_2) \subset U_2$$

$$\Rightarrow K(x, \varepsilon) \subset U_1 \cap U_2$$

d.h. $U_1 \cap U_2$ ist offen.

(c)

Beh.: $\mathbb{R}^n$ ist offen

Bew.:

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Punkt $\Rightarrow x \in K(x, \varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Wegen $K(x, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}^n$ offen.

Beh.: $\emptyset$ ist offen

Bew.:

$\emptyset$ enthält kein Element, also gibt es kein $x \in \emptyset$, zu dem eine offene Kugel $K(x, \varepsilon) \subset \emptyset$ existieren müsste.

Aufgabe 2

Beh.: $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen $\Leftrightarrow$ für jede konvergente Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset A$ gilt:
 $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu \in A$.

Bew.:

„ $\Rightarrow$ “: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, sei $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset A$ eine Folge mit $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = x$.
zu zeigen: $x \in A$

Annahme: $x \notin A \Rightarrow x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. A abgeschlossen $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus A$ offen.

$\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A$ ist Umgebung von x .

Aus der Definition der Konvergenz folgt hieraus:

Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_\nu \in \mathbb{R}^n \setminus A \quad \forall \nu \geq N$, d.h. $x_\nu \notin A \quad \forall \nu \geq N$.

Dies steht im Widerspruch dazu, dass $x_\nu \in A \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$. Damit ist $x \in A$ bewiesen.
„ $\Leftarrow$ “: Es gelte: für jede konvergente Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset A$ sei $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu \in A$.
zu zeigen: A ist abgeschlossen.

Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$.

Betrachte alle offenen Kugeln $K(x, \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$.

Annahme: $K(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0$.

Dann gilt für jedes $\nu \in \mathbb{N}^*$: es gibt ein $x_\nu \in A$ mit $x_\nu \in K(x, \varepsilon = \frac{1}{\nu}) \Leftrightarrow d(x, x_\nu) < \frac{1}{\nu}$, d.h. die Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset A$ konvergiert gegen x , d.h. $\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu = x$ und nach Voraussetzung ist $x \in A$.

Dies steht im Widerspruch zu $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ und somit ist die Annahme falsch.
Also gibt es doch ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass $K(x, \varepsilon_0) \cap A = \emptyset \Rightarrow K(x, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, d.h. $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen.

$\Leftrightarrow A$ ist abgeschlossen. □

Aufgabe 3

$$f : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x, y) = x^y \Leftrightarrow f(x, y) = e^{y \cdot \ln(x)}$$

Bestimme das Taylorpolynom 3-ter Ordnung im Punkt $(1, 1)$.

Sei $p = (1, 1) = (x_0, y_0)$

$$\begin{aligned}
D_x f &= \frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} \\
\Rightarrow D_x f(p) &= 1 \\
D_x^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2} \\
\Rightarrow D_x^2 f(p) &= 0 \\
D_x^3 f &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = y \cdot (y-1) \cdot (y-2) \cdot x^{y-3} \\
\Rightarrow D_x^3 f(p) &= 0 \\
D_y f &= \frac{\partial f}{\partial y} = e^{y \cdot \ln(x)} \cdot \ln(x) = x^y \cdot \ln(x) \\
\Rightarrow D_y f(p) &= 0 \\
D_y^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{y \cdot \ln(x)} \cdot (\ln(x))^2 = x^y \cdot (\ln(x))^2 \\
\Rightarrow D_y^2 f(p) &= 0 \\
D_y^3 f &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = e^{y \cdot \ln(x)} \cdot (\ln(x))^3 = x^y \cdot (\ln(x))^3 \\
\Rightarrow D_y^3 f(p) &= 0 \\
D_x D_y f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\
&= y \cdot x^{y-1} \cdot \ln(x) + x^y \cdot \frac{1}{x} \\
&= x^{y-1} \cdot (y \cdot \ln(x) + 1) = D_y D_x f \\
\Rightarrow D_x D_y f(p) &= 1 \\
D_x^2 D_y f &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \\
&= (y-1) \cdot x^{y-2} \cdot (y \cdot \ln(x) + 1) + x^{y-1} \cdot y \cdot \frac{1}{x} \\
&= x^{y-2} \cdot [(y-1) \cdot (y \cdot \ln(x) + 1) + y] = D_y D_x^2 f \\
\Rightarrow D_x^2 D_y f(p) &= 1 \\
D_x D_y^2 f &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \\
&= y \cdot x^{y-1} \cdot (\ln(x))^2 + x^y \cdot 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} \\
&= y \cdot x^{y-1} \cdot (\ln(x))^2 + 2 \cdot x^{y-1} \cdot \ln(x) \\
&= x^{y-1} \cdot \ln(x) \cdot (y \cdot \ln(x) + 2) = D_y^2 D_x f \\
\Rightarrow D_x D_y^2 f(p) &= 0
\end{aligned}$$

Taylorpolynom:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= f(p) + D_x f(p) \cdot (x - x_0) + D_y f(p) \cdot (y - y_0) \\
&\quad + \frac{1}{2!} \cdot [D_x^2 f(p) \cdot (x - x_0)^2 + 2D_x D_y f(p) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + D_y^2 f(p) \cdot (y - y_0)^2] \\
&\quad + \frac{1}{3!} \cdot [D_x^3 f(p) \cdot (x - x_0)^3 + 3D_x^2 D_y f(p) \cdot (x - x_0)^2 \cdot (y - y_0) \\
&\quad + 3D_x D_y^2 f(p) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0)^2 + D_y^3 f(p) \cdot (y - y_0)^3] \\
f(x, y) &= 1 + 1(x - 1) + 0(y - 1) \\
&\quad + \frac{1}{2!} \cdot [0(x - 1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot (x - 1) \cdot (y - 1) + 0(y - 1)^2] \\
&\quad + \frac{1}{3!} \cdot [0(x - 1)^3 + 3 \cdot 1 \cdot (x - 1)^2 \cdot (y - 1) + 3 \cdot 0 \cdot (x - 1) \cdot (y - 1)^2 + 0 \cdot (y - 1)^3] \\
f(x, y) &= 1 + (x - 1) + (x - 1)(y - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2(y - 1) \\
f(x, y) &= x + xy - x - y + 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1)(y - 1) \\
&= xy - y + 1 + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}x^2 - xy + x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

$(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2, k = 1, \dots, n$, seien Punkte in der Ebene. Bestimme $a, b \in \mathbb{R}$ der Gerade $y = ax + b$, sodass

$$\sum_{k=1}^n (ax_k + b - y_k)^2$$

minimal wird.

Lösung: Sei $S(a, b) = \sum_{k=1}^n (ax_k + b - y_k)^2$

Notw. Bed.: $\text{grad } S = 0$

$$\begin{aligned}
 D_a S = \frac{\partial S}{\partial a} &= \sum_{k=1}^n 2(ax_k + b - y_k)x_k \\
 &= \sum_{k=1}^n (2x_k^2 \cdot a + 2x_k b - 2x_k y_k) \\
 &= 2a \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2b \cdot \sum_{k=1}^n x_k - 2 \cdot \sum_{k=1}^n x_k y_k
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 D_b S = \frac{\partial S}{\partial b} &= \sum_{k=1}^n 2(ax_k + b - y_k) \cdot 1 \\
 &= \sum_{k=1}^n (2ax_k + 2b - 2y_k) \\
 &= 2a \cdot \sum_{k=1}^n x_k + 2b \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n 1}_{=n} - 2 \cdot \sum_{k=1}^n y_k \\
 &= 2a \cdot \sum_{k=1}^n x_k + 2nb - 2 \cdot \sum_{k=1}^n y_k
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\text{Es muss gelten: } \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} b = \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{k=1}^n y_k - a \sum_{k=1}^n x_k \right] \tag{3}$$

$$\text{Weiterhin muss gelten: } \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} a \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 + b \cdot \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n x_k y_k = 0$$

b aus (3) einsetzen:

$$\begin{aligned}
 &a \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 + \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{k=1}^n y_k - a \cdot \sum_{k=1}^n x_k \right] \cdot \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n x_k y_k = 0 \\
 \Leftrightarrow &\frac{1}{n} \cdot a \cdot \left[n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \right] = \frac{1}{n} \cdot \left[n \cdot \sum_{k=1}^n x_k y_k - \sum_{k=1}^n x_k \cdot \sum_{k=1}^n y_k \right]
 \end{aligned} \tag{4}$$

Untersuchung, unter welchen Bedingungen durch den Klammerterm dividiert werden darf:

(α) Ist $n = 1$, also nur ein Punkt $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ gegeben, so ist

$$a(x_1^2 - x_1^2) = x_1 y_1 - x_1 y_1 \Leftrightarrow a \cdot 0 = 0$$

Diese Gleichung ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ erfüllt, d.h. die Gerade $g : y = ax + b$ durch (x_1, y_1) kann jede beliebige Steigung a haben. Der zugehörige y-Achsenabschnitt b ergibt sich gemäß (3) aus $b = y_1 - ax_1$

(β) Sei nun $n \geq 2$:

Dann kann die Gerade g wegen $y = ax + b$ nicht parallel zur y-Achse verlaufen.

Es muss also deshalb unter allen x_k mindestens zwei voneinander verschiedene x_k -Werte geben. In diesem Fall ist aber der Klammerterm:

$$n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 > 0 \quad (*)$$

Der Beweis von $(*)$ wird weiter unten nachgeholt.

Fortführung der Rechnung zur Bestimmung von a und b :

Unter den genannten Bedingungen folgt aus (4):

$$a = \frac{n \cdot \sum_{k=1}^n x_k y_k - (\sum_{k=1}^n x_k) \cdot (\sum_{k=1}^n y_k)}{n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\sum_{k=1}^n x_k)^2} \quad (5)$$

(5) in (3) einsetzen:

$$\begin{aligned} \Rightarrow b &= \frac{1}{n} \cdot \left[\sum_{k=1}^n y_k - \frac{n \cdot \sum_{k=1}^n x_k y_k - (\sum_{k=1}^n x_k) \cdot (\sum_{k=1}^n y_k)}{n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\sum_{k=1}^n x_k)^2} \cdot \sum_{k=1}^n x_k \right] \\ \Leftrightarrow b &= \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{n (\sum_{k=1}^n x_k^2) \cdot (\sum_{k=1}^n y_k) - (\sum_{k=1}^n x_k)^2 \cdot (\sum_{k=1}^n y_k)}{n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\sum_{k=1}^n x_k)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-n \cdot (\sum_{k=1}^n x_k y_k) \cdot (\sum_{k=1}^n x_k) + (\sum_{k=1}^n x_k)^2 \cdot (\sum_{k=1}^n y_k)}{n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\sum_{k=1}^n x_k)^2} \right] \\ \Leftrightarrow b &= \frac{(\sum_{k=1}^n x_k^2) \cdot (\sum_{k=1}^n y_k) - (\sum_{k=1}^n x_k y_k) \cdot (\sum_{k=1}^n x_k)}{n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\sum_{k=1}^n x_k)^2} \quad (6) \end{aligned}$$

Nun zum Beweis von $(*)$:

Beh.: Sind mindestens zwei x_k voneinander verschieden, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:

$$n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 > 0$$

Beweis durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang: $n = 2$

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{k=1}^2 x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^2 x_k \right)^2 &= 2 \cdot (x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 > 0 \quad \text{da } x_1 \neq x_2 \end{aligned}$$

2. (a) Induktionsannahme: Für $n \geq 2$ gelte: $n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\sum_{k=1}^n x_k)^2 > 0$

(b) Induktionsbehauptung: Dann gilt auch

$$(n+1) \cdot \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k \right)^2 > 0$$

(c) Induktionsbegründung:

$$\begin{aligned}
(n+1) \cdot \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k \right)^2 &= (n+1) \cdot \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 + x_{n+1}^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} \right)^2 \\
&= n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 + 1 \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 + (n+1) \cdot x_{n+1}^2 \\
&\quad - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - 2 \cdot \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \cdot x_{n+1} - x_{n+1}^2 \\
&= \underbrace{n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2}_{>0 \text{ nach 2(a)}} + \sum_{k=1}^n x_k^2 \\
&\quad - 2 \cdot \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \cdot x_{n+1} + n \cdot x_{n+1}^2 \\
&> \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{k=1}^n (2x_k x_{n+1}) + \sum_{k=1}^n x_{n+1}^2 \\
&= \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 2x_k x_{n+1} + x_{n+1}^2) \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^n \underbrace{(x_k - x_{n+1})^2}_{\geq 0}}_{>0 \text{ nach Vor.}} > 0
\end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung:

$$\begin{aligned}
D_a^2 S &= \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 \\
D_b^2 S &= \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2 \cdot n \\
D_a D_b S &= \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n x_k = D_b D_a S \\
\Rightarrow (Hesse\ S) &= \begin{pmatrix} 2 \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 & 2 \cdot \sum_{k=1}^n x_k \\ 2 \cdot \sum_{k=1}^n x_k & 2n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 2 \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n \underbrace{x_k^2}_{\geq 0}}_{>0} & 2 \cdot \sum_{k=1}^n x_k \\ 2 \cdot \sum_{k=1}^n x_k & 2n \end{pmatrix} > 0$$

$\sum_{k=1}^n x_k^2 > 0$, da mindestens zwei x_k verschieden sind und somit mindestens ein $x_k \neq 0$ ist.

$$\det(\text{Hesse } S) = 4 \cdot \underbrace{\left[n \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \right]}_{>0 \text{ nach } (*)} > 0$$

Somit ist $(\text{Hesse } S)$ positiv definit.

Da dies unabhängig von der Wahl von $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, gilt es insbesondere auch für a und b gemäß (5) und (6) und somit wird $S(a, b)$ minimal. $\square$

Aufgabe 5

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = -(x^2 + y^2)^2 - 3xy^2 + x^3 + 5(x^2 + y^2) - \frac{875}{256}$$

$$D_x f = -2(x^2 + y^2) \cdot 2x - 3y^2 + 3x^2 + 5 \cdot 2x$$

$$D_x f = -4x(x^2 + y^2) - 3y^2 + 3x^2 + 10x$$

$$D_x f = -4x^3 - 4xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 10x$$

$$D_y f = -2(x^2 + y^2) \cdot 2y - 6xy + 5 \cdot 2y$$

$$D_y f = -4x^2y - 4y^3 - 6xy + 10y$$

$$D_x^2 f = -12x^2 - 4y^2 + 6x + 10$$

$$D_y^2 f = -4x^2 - 12y^2 - 6x + 10$$

$$D_x D_y f = -8xy - 6y = D_y D_x f$$

Notwendige Bedingungen: $D_x f = 0 \wedge D_y f = 0$

$$D_x f = 0 \Leftrightarrow -4x^3 - 4xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 10x = 0$$

$$y^2(4x + 3) = -4x^3 + 3x^2 + 10x \quad (*)$$

$$D_y f = 0 \Leftrightarrow -4x^2y - 4y^3 - 6xy + 10y = 0 \quad (**)$$

1. Fall: $y = 0$ erfüllt die Gleichung $(**)$ ($D_y f = 0$) für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -4x^3 + 3x^2 + 10x = 0 \\
&\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} -4x \left(x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{5}{2} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{5}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow x_{2,3} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{160}{64}} = \frac{3}{8} \pm \frac{13}{8} \\
&\Leftrightarrow x_2 = \frac{16}{8} = 2 \\
&\Leftrightarrow x_3 = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4} \\
&\Rightarrow p_1 = (0, 0), \quad p_2 = (2, 0), \quad p_3 = \left(-\frac{5}{4}, 0\right) \quad \text{sind mögliche Extrempunkte}
\end{aligned}$$

2. Fall: Sei nun $y \neq 0$:

$$\begin{aligned}
D_y f = 0 &\Leftrightarrow -4x^2y - 4y^3 - 6xy + 10y = 0 \\
&\stackrel{y \neq 0}{\Leftrightarrow} -x^2 - y^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow y^2 = -x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \quad (***) \\
&\Rightarrow y^2 = (-1) \cdot (x - 1) \cdot \left(x + \frac{5}{2}\right)
\end{aligned}$$

(***) in (*):

$$\begin{aligned}
\left(-x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right)(4x + 3) &= -4x^3 + 3x^2 + 10x \\
-4x^3 - 3x^2 - 6x^2 - \frac{9}{2}x + 10x + \frac{15}{2} &= -4x^3 + 3x^2 + 10x \\
-9x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{15}{2} &= 3x^2 \\
-12x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{15}{2} &= 0 \\
x^2 + \frac{9}{24}x - \frac{15}{24} &= 0 \\
x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{5}{8} &= 0 \\
x_{4,5} &= -\frac{3}{16} \pm \sqrt{\frac{9}{256} + \frac{160}{256}} = -\frac{3}{16} \pm \frac{13}{16} \\
x_4 &= \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \\
x_5 &= -1
\end{aligned}$$

$$p_{41} = \left(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}\sqrt{3}\right), \quad p_{42} = \left(\frac{5}{8}, -\frac{5}{8}\sqrt{3}\right), \quad p_{51} = (-1, \sqrt{3}), \quad p_{52} = (-1, -\sqrt{3})$$

sind weitere mögliche Extrempunkte.

(a) $p_1 = (0, 0)$:

$(Hesse f)(p_1) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, denn $\det(10) = 10 > 0$ und

$$\det \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = 100 > 0$$

$\Rightarrow f$ hat in $p_1 = (0, 0)$ ein isoliertes Minimum mit dem Minimumwert

$$f(p_1) = -\frac{875}{256}$$

(b) $p_2 = (2, 0)$:

$(Hesse f)(p_2) = \begin{pmatrix} -26 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$ ist negativ definit, denn:

$-(Hesse f)(p_2) = \begin{pmatrix} 26 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, da $\det(26) = 26 > 0$ und

$$\det \begin{pmatrix} 26 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} = 468 > 0 \text{ ist.}$$

$\Rightarrow f$ hat in p_2 ein isoliertes Maximum mit dem Maximumwert

$$f(p_2) = 12 - \frac{875}{256} = \frac{2197}{256} = 8,58203125$$

(c) $p_3 = \left(-\frac{5}{4}, 0\right)$:

$(Hesse f)(p_3) = \begin{pmatrix} -16,25 & 0 \\ 0 & 11,25 \end{pmatrix}$ ist indefinit, denn:

$$\begin{pmatrix} -16,25 & 0 \\ 0 & 11,25 \end{pmatrix} \cdot \xi = \begin{pmatrix} -16,25 & 0 \\ 0 & 11,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16,25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16,25 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -16,25 < 0$$

$$\text{und } \begin{pmatrix} -16,25 & 0 \\ 0 & 11,25 \end{pmatrix} \cdot \eta = \begin{pmatrix} -16,25 & 0 \\ 0 & 11,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11,25 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 11,25 \end{pmatrix} \right\rangle = 11,25 > 0$$

$\Rightarrow f$ besitzt in $p_3 = \left(-\frac{5}{4}, 0\right)$ kein lokales Extremum.

(d) $p_{41} = \left(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}\sqrt{3}\right)$:

$$\begin{aligned}
D_x^2 f(p_{41}) &= -12 \cdot \frac{25}{64} - 4 \cdot \frac{25}{64} \cdot 3 + 6 \cdot \frac{5}{8} + 10 = 4,375 = \frac{35}{8} \\
D_x D_y f(p_{41}) &= -8 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \sqrt{3} - 6 \cdot \frac{5}{8} \sqrt{3} \\
&= -\frac{25}{8} \sqrt{3} - \frac{30}{8} \sqrt{3} = -\frac{55}{8} \sqrt{3} \\
D_y^2 f(p_{41}) &= -4 \cdot \frac{25}{64} - 12 \cdot \frac{25}{64} \cdot 3 - 6 \cdot \frac{5}{8} + 10 \\
&= -\frac{25}{16} - \frac{225}{16} - \frac{60}{16} + 10 = -\frac{310}{16} + 10 \\
&= -\frac{155}{8} + \frac{80}{8} = -\frac{75}{8} = -9,375
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (Hesse f)(p_{41}) = \begin{pmatrix} \frac{35}{8} & -\frac{55}{8}\sqrt{3} \\ -\frac{55}{8}\sqrt{3} & -\frac{75}{8} \end{pmatrix}$ ist indefinit, denn:

(1) $\det((Hesse f)(p_{41})) = -\frac{35}{8} \cdot \frac{75}{8} - \left(\frac{55}{8}\sqrt{3}\right)^2 < 0$, d.h. $(Hesse f)(p_{41})$ ist nicht positiv definit.

(2) Betrachte nun $-(Hesse f)(p_{41})$: Da $\det\left(\frac{-35}{8}\right) = -\frac{35}{8} < 0$ ist $-(Hesse f)(p_{41})$ nicht positiv definit $\Leftrightarrow (Hesse f)(p_{41})$ ist nicht negativ definit.

Aus (1) und (2) folgt: $(Hesse f)(p_{41})$ ist indefinit.

(e) $p_{42} = \left(\frac{5}{8}, -\frac{5}{8}\sqrt{3}\right)$:

$$\begin{aligned}
D_x^2 f(p_{42}) &= D_x^2 f(p_{41}) = \frac{35}{8} \\
D_x D_y f(p_{42}) &= -D_x D_y f(p_{41}) = \frac{55}{8}\sqrt{3} \\
D_y^2 f(p_{42}) &= D_y^2 f(p_{41}) = -\frac{75}{8}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (Hesse f)(p_{42}) = \begin{pmatrix} \frac{35}{8} & \frac{55}{8}\sqrt{3} \\ \frac{55}{8}\sqrt{3} & -\frac{75}{8} \end{pmatrix}$ ist indefinit. Begründung analog wie in

(d).

$\Rightarrow p_{42} = \left(\frac{5}{8}, -\frac{5}{8}\sqrt{3}\right)$ ist kein lokales Extremum von f .

(f) $p_{51} = (-1, \sqrt{3})$:

$$\begin{aligned}
D_x^2 f(p_{51}) &= -20 \\
D_x D_y f(p_{51}) &= 8\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \\
D_y^2 f(p_{51}) &= -24
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (Hesse f)(p_{51}) &= \begin{pmatrix} -20 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -24 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow -(Hesse f)(p_{51}) &= \begin{pmatrix} 20 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 24 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \det(20) = 20 > 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 20 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 24 \end{pmatrix} = 480 - 12 = 468 > 0$$

$$\Rightarrow -(Hesse f)(p_{51}) \text{ ist positiv definit.}$$

$$\Leftrightarrow (Hesse f)(p_{51}) \text{ ist negativ definit.}$$

$$\Rightarrow f \text{ hat in } p_{51} = (-1, \sqrt{3}) \text{ ein isoliertes Maximum mit dem Maximumswert}$$

$$f(p_{51}) = 12 - \frac{875}{256} = \frac{2197}{256} = 8,58203125$$

$$(g) p_{52} = (-1, -\sqrt{3}):$$

$$D_x^2 f(p_{52}) = -20$$

$$D_x D_y f(p_{52}) = -2\sqrt{3}$$

$$D_y^2 f(p_{52}) = -24$$

$$\Rightarrow (Hesse f)(p_{52}) = \begin{pmatrix} -20 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -24 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -(Hesse f)(p_{52}) = \begin{pmatrix} 20 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 24 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(20) = 20 > 0 \wedge \det \begin{pmatrix} 20 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 24 \end{pmatrix} = 468 > 0$$

$$\Rightarrow -(Hesse f)(p_{52}) \text{ ist positiv definit.}$$

$$\Rightarrow (Hesse f)(p_{52}) \text{ ist negativ definit.}$$

$$\Rightarrow f \text{ hat in } p_{52} = (-1, -\sqrt{3}) \text{ ein isoliertes Maximum mit dem Maximumswert } f(p_{52}) = 8,58203125.$$