

Übungsblatt 4  
Jan Hendrik Dithmar  
Übungsgruppe 1 - Mo, 14-16 Uhr  
Janko Böhm

## Aufgabe 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(a)

$$K_j = \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^3 |a_{kj}|\} \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

$$K_1 = \{\mu \mid |\mu - 3| \leq 2\} \Rightarrow 0 \notin K_1$$

$$K_2 = \{\mu \mid |\mu - 4| \leq 3\} \Rightarrow 0 \notin K_2$$

$$K_3 = \{\mu \mid |\mu - 4| \leq 3\} \Rightarrow 0 \notin K_3$$

$$\Rightarrow 0 \notin \bigcup_{j=1}^3 K_j \Rightarrow A \text{ ist invertierbar.}$$

(b)

Spektralnorm:  $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(tA \cdot A)}$

Da  $A$  symmetrisch ist, ist  $\|A\|_2 = \lambda_{\max}(A)$ .

Hierbei ist  $\lambda_{\max}(A) = \max_j \{|\lambda_j| \mid \lambda_j \text{ ist Eigenwert von } A\}$

Berechne die Eigenwerte von  $A$ :

$$\begin{aligned} \det(A - t \cdot E_3) &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} 3-t & -1 & -1 \\ -1 & 4-t & -2 \\ -1 & -2 & 4-t \end{pmatrix} &= (3-t) \cdot (4-t)^2 - 2 - 2 - (4-t) - 4 \cdot (3-t) - (4-t) \\ &= (3-t) \cdot (16 - 8t + t^2) - 4 - 4 + t - 12 + 4t - 4 + t \\ &= 48 - 24t + 3t^2 - 16t + 8t^2 - t^3 - 24 + 6t \\ &= -t^3 + 11t^2 - 34t + 24 \\ &= (-1) \cdot (t^3 - 11t^2 + 34t - 24) \end{aligned}$$

$$t^3 - 11t^2 + 34t - 24 = 0$$

$$t_1 = 1 \text{ ist Lösung}$$

$$t^3 - 11t^2 + 34t - 24 = (t^2 - 10t + 24) \cdot (t - 1)$$

Die Eigenwerte von  $A$  sind demnach:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 4$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 = \lambda_{\max}(A) = \max\{1; 6; 4\} = 6$$

Also:  $\|A\|_2 = 6 \leq 7$  (w)

□

## Aufgabe 2

(b)

$$f_1(t) = f(t)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= (\cos(t), \sin(t), t) \\ f'(t) &= (-\sin(t), \cos(t), 1) \\ f''(t) &= (-\cos(t), -\sin(t), 0) \end{aligned}$$

$$\|f'(t)\|^2 = \sin^2(t) + \cos^2(t) + 1 = 2$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 f'_j(t) \cdot f''_j(t) &= f'_1(t) \cdot f''_1(t) + f'_2(t) \cdot f''_2(t) + f'_3(t) \cdot f''_3(t) \\ &= -\sin(t) \cdot (-\cos(t)) + \cos(t) \cdot (-\sin(t)) + 1 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{A2(a)}{\Rightarrow} \kappa(t) &= \frac{1}{2} \cdot \left\| (-\cos(t), -\sin(t), 0) - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (-\sin(t), \cos(t), 1)}_{=(0,0,0)} \cdot 0 \right\| \\ \kappa(t) &= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t) + 0^2}}_{=1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f_3(t) = h(t)$$

$$\begin{aligned} h(t) &= (t, t^2, t^3) \\ h'(t) &= (1, 2t, 3t^2) \\ h''(t) &= (0, 2, 6t) \end{aligned}$$

$$\|h'(t)\|^2 = 1 + 4t^2 + 9t^4$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 h'_j(t) \cdot h''_j(t) &= h'_1(t) \cdot h''_1(t) + h'_2(t) \cdot h''_2(t) + h'_3(t) \cdot h''_3(t) \\ &= 1 \cdot 0 + 2t \cdot 2 + 3t^2 \cdot 6t \\ &= 4t + 18t^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{A2(a)}{\Rightarrow} \kappa(t) &= \frac{1}{1 + 4t^2 + 9t^4} \cdot \left\| (0, 2, 6t) - \frac{4t + 18t^3}{1 + 4t^2 + 9t^4} \cdot (1, 2t, 3t^2) \right\| \\ \kappa(t) &= \frac{1}{1 + 4t^2 + 9t^4} \cdot \left\| \frac{(0, 2 + 8t^2 + 18t^4, 6t + 24t^3 + 54t^4) - (4t + 18t^3, 8t^2 + 36t^4)}{1 + 4t^2 + 9t^4} \right\| \\ \kappa(t) &= \frac{1}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^2} \cdot \|(-4t - 18t^3, 2 - 18t^4, 6t + 12t^3)\| \\ \kappa(t) &= \frac{1}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^2} \cdot \sqrt{(-4t - 18t^3)^2 + (2 - 18t^4)^2 + (6t + 12t^3)^2} \\ \kappa(t) &= \frac{1}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^2} \cdot \sqrt{16t^2 + 144t^4 + 324t^6 + 4 - 72t^4 + 324t^8 + 36t^2 + 144t^4 + 144t^6} \\ \kappa(t) &= \frac{1}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^2} \cdot \sqrt{52t^2 + 216t^4 + 468t^6 + 324t^8 + 4} \end{aligned}$$

Zwischenrechnung:

$$\begin{aligned} \text{Radikand} &= 4 \cdot (1 + 13t^2 + 54t^4 + 117t^6 + 81t^8) \\ &= 4 \cdot (1 + 8t^2 + 34t^4 + 72t^6 + 81t^8) + 4 \cdot (5t^2 + 20t^4 + 45t^6) \\ &= 4 \cdot (1 + 4t^2 + 9t^4)^2 + 4 \cdot 5t^2 \cdot (1 + 4t^2 + 9t^4) \\ &= 4 \cdot (1 + 4t^2 + 9t^4) \cdot [1 + 4t^2 + 9t^4 + 5t^2] \\ &= 4 \cdot (1 + 4t^2 + 9t^4) \cdot (1 + 9t^2 + 9t^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \kappa(t) &= \frac{2 \cdot \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^2} \cdot \sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4} \\ \Leftrightarrow \kappa(t) &= \frac{2 \cdot \sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

□

## Aufgabe 4

Sei  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ .

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (e^{at} \cdot \cos(t), e^{at} \cdot \sin(t))$$

Bemerkung: Die Kurve  $f$  ist eine logarithmische Spirale.

(a)

Bestimme die Bogenlänge von  $f([-\infty, t]), t \in \mathbb{R}$

Lösung: Die Bogenlänge von  $f([-\infty, t])$  sei  $L(t)$ .

Es gilt:

$$\begin{aligned} L(t) &= \int_{-\infty}^t \|f'(\tau)\| d\tau = \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^t \|f'(\tau)\| d\tau, \quad u < t \\ f'(\tau) &= (a \cdot e^{a\tau} \cos(\tau) + e^{a\tau}(-\sin(\tau)), a \cdot e^{a\tau} \sin(\tau) + e^{a\tau} \cos(\tau)) \\ f'(\tau) &= (e^{a\tau} \cdot (a \cdot \cos(\tau) - \sin(\tau)), e^{a\tau} \cdot (a \cdot \sin(\tau) + \cos(\tau))) \\ \Rightarrow \|f'(\tau)\|^2 &= e^{2a\tau} \cdot (a \cdot \cos(\tau) - \sin(\tau))^2 + e^{2a\tau} \cdot (a \cdot \sin(\tau) + \cos(\tau))^2 \\ &= e^{2a\tau} \cdot (a^2 \cdot \cos^2(\tau) - 2a \cdot \sin(\tau)\cos(\tau) + \sin^2(\tau)) + e^{2a\tau} \cdot (a^2 \cdot \sin^2(\tau) + 2a \cdot \sin(\tau)\cos(\tau) + \cos^2(\tau)) \\ &= e^{2a\tau} \cdot [a^2 \cdot \underbrace{(\cos^2(\tau) + \sin^2(\tau))}_{=1} + \underbrace{(\sin^2(\tau) + \cos^2(\tau))}_{=1}] \\ \|f'(\tau)\|^2 &= e^{2a\tau} \cdot (a^2 + 1) \\ \Rightarrow \|f'(\tau)\| &= \sqrt{e^{2a\tau} \cdot (a^2 + 1)} \\ \Leftrightarrow \|f'(\tau)\| &= \sqrt{a^2 + 1} \cdot e^{a\tau} \\ \Rightarrow \int_u^t \|f'(\tau)\| d\tau &= \int_u^t \sqrt{a^2 + 1} \cdot e^{a\tau} d\tau \\ &= \sqrt{a^2 + 1} \cdot \left[ \frac{1}{a} \cdot e^{a\tau} \right]_u^t = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \cdot (e^{at} - e^{au}) \\ \Rightarrow L(t) &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \cdot (e^{at} - e^{au}) \right), \quad a > 0 \\ \Leftrightarrow L(t) &= \frac{1}{a} \cdot \sqrt{a^2 + 1} \cdot e^{at} \end{aligned}$$

(b)

Bestimme den Winkel zwischen der Geraden durch 0 und  $f(t)$  und den Tangentialvektor von  $f$  und  $f(t)$

Die Gerade  $g(\tau)$  durch 0 und  $f(t) = (e^{at} \cdot \cos(t), e^{at} \cdot \sin(t))$  ist

$$g(\tau) = (0, 0) + \tau \cdot (e^{at} \cdot \cos(t), e^{at} \cdot \sin(t)) = \tau \cdot f(t)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} g(1) &= (e^{at} \cdot \cos(t), e^{at} \cdot \sin(t)) = f(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ g'(\tau) &= f'(t) \quad \forall \tau \\ \Rightarrow g'(1) &= (e^{at} \cos(t), e^{at} \sin(t)) \end{aligned}$$

Der Tangentialvektor von  $f$  in  $f(t)$ , d.h. zum Parameterwert  $t$ , ist

$$f'(t) = (e^{at} \cdot (a \cdot \cos(t) - \sin(t)), e^{at} \cdot (a \cdot \sin(t) + \cos(t)))$$

Der Winkel  $\vartheta$  berechnet sich aus

$$\cos(\vartheta) = \frac{\langle f'(t), g'(1) \rangle}{\|f'(t)\| \cdot \|g'(1)\|}, \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

$$\begin{aligned} \langle f'(t), g'(1) \rangle &= e^{at} \cdot (a \cdot \cos(t) - \sin(t)) \cdot e^{at} \cdot \cos(t) + e^{at} \cdot (a \cdot \sin(t) + \cos(t)) \cdot e^{at} \cdot \sin(t) \\ &= e^{2at} \cdot [a \cdot \cos^2(t) - \sin(t)\cos(t) + a \cdot \sin^2(t) + \sin(t)\cos(t)] \\ &= e^{2at} \cdot a \cdot (\cos^2(t) + \sin^2(t)) \\ &= a \cdot e^{2at} \\ \|f'(t)\| &= \sqrt{a^2 + 1} \cdot e^{at} \\ \|g'(1)\| &= \sqrt{e^{2at} \cdot \cos^2(t) + e^{2at} \cdot \sin^2(t)} = e^{at} \\ \Rightarrow \cos(\vartheta) &= \frac{a \cdot e^{2at}}{\sqrt{a^2 + 1} \cdot e^{at} \cdot e^{at}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \\ \Rightarrow \vartheta &= \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}\right) \end{aligned}$$

Bemerkung 1:  $a > 0 \Rightarrow 0 < \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} < 1 \Rightarrow \vartheta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Bemerkung 2: Der Schnittwinkel  $\vartheta$  ist von  $t$  unabhängig, d.h. jede Gerade durch 0 schneidet die logarithmische Spirale (bei festem  $a$ ) unter dem gleichen Winkel.

## Aufgabe 5

$a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$

Vorbetrachtung:

Sei  $e = (e_1, e_2, e_3)$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^3$ . Betrachte

$$\begin{aligned} \det(a, b, e) &:= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 b_2 e_3 + a_3 b_1 e_2 + a_2 b_3 e_1 - a_3 b_2 e_1 - a_1 b_3 e_2 - a_2 b_1 e_3 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3 \\ &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \\ &= a \times b \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) &= \begin{vmatrix} a_1 & (b_2c_3 - b_3c_2) & e_1 \\ a_2 & (b_3c_1 - b_1c_3) & e_2 \\ a_3 & (b_1c_2 - b_2c_1) & e_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1(b_3c_1 - b_1c_3)e_3 + a_3(b_2c_3 - b_3c_2)e_2 + a_2(b_1c_2 - b_2c_1)e_1 \\ &\quad - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)e_1 - a_1(b_1c_2 - b_2c_1)e_2 - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)e_3 \\ &= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3b_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_3b_3) - c_2(a_1b_1 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1(a_1c_1) - c_1(a_1b_1) \\ b_2(a_2c_2) - c_2(a_2b_2) \\ b_3(a_3c_3) - c_3(a_3b_3) \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 \cdot \langle a, c \rangle \\ b_2 \cdot \langle a, c \rangle \\ b_3 \cdot \langle a, c \rangle \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \cdot \langle a, b \rangle \\ c_2 \cdot \langle a, b \rangle \\ c_3 \cdot \langle a, b \rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \langle a, c \rangle - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot \langle a, b \rangle \\ &= b \langle a, c \rangle - c \langle a, b \rangle \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \langle a \times b, c \times d \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_2d_3 - c_3d_2 \\ c_3d_1 - c_1d_3 \\ c_1d_2 - c_2d_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)(c_2d_3 - c_3d_2) + (a_3b_1 - a_1b_3)(c_3d_1 - c_1d_3) \\ &\quad + (a_1b_2 - a_2b_1)(c_1d_2 - c_2d_1) \\ &= a_2c_2b_3d_3 + a_3c_3b_2d_2 + a_3c_3b_1d_1 + a_1c_1b_3d_3 \\ &\quad + a_1c_1b_2d_2 + a_2c_2b_1d_1 \\ &\quad - b_3c_3a_2d_2 - b_2c_2a_3d_3 - b_1c_1a_3d_3 - b_3c_3a_1d_1 \\ &\quad - b_2c_2a_1d_1 - b_1c_1a_2d_2 \end{aligned}$$

Addition von 0 in der Form  $(a_1c_1b_1d_1 - b_1c_1a_1d_1) + (a_2c_2b_2d_2 - b_2c_2a_2d_2) + (a_3c_3b_3d_3 - b_3c_3a_3d_3)$ , Umordnen von Summen und Klammern ergibt:

$$\begin{aligned}
 \langle a \times b, c \times d \rangle &= (a_1c_1b_1d_1 + a_1c_1b_2d_2 + a_1c_1b_3d_3 \\
 &\quad + a_2c_2b_1d_1 + a_2c_2b_2d_2 + a_2c_2b_3d_3 \\
 &\quad + a_3c_3b_1d_1 + a_3c_3b_2d_2 + a_3c_3b_3d_3) \\
 &\quad - (b_1c_1a_1d_1 + b_1c_1a_2d_2 + b_1c_1a_3d_3 \\
 &\quad + b_2c_2a_1d_1 + b_2c_2a_2d_2 + b_2c_2a_3d_3 \\
 &\quad + b_3c_3a_1d_1 + b_3c_3a_2d_2 + b_3c_3a_3d_3) \\
 &= a_1c_1 \cdot \langle b, d \rangle + a_2c_2 \cdot \langle b, d \rangle + a_3c_3 \cdot \langle b, d \rangle \\
 &\quad - (b_1c_1 \cdot \langle a, d \rangle + b_2c_2 \cdot \langle a, d \rangle + b_3c_3 \cdot \langle a, d \rangle) \\
 &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \cdot \langle b, d \rangle \\
 &\quad - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) \cdot \langle a, d \rangle \\
 &= \langle a, c \rangle \cdot \langle b, d \rangle - \langle b, c \rangle \cdot \langle a, d \rangle
 \end{aligned}$$