

Übungsblatt 3
Jan Hendrik Dithmar
Übungsgruppe 1 - Mo, 14-16 Uhr
Janko Böhm

Aufgabe 1

$P_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n), n \geq 0$ Behauptung: Für $n > m$ gilt:

$$\int_{-1}^1 x^m \cdot P_n(x) dx = 0$$

Beweis:

$$\int_{-1}^1 x^m \cdot P_n(x) dx = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \int_{-1}^1 x^m \cdot \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) dx$$

$$\text{Setze: } Q(x) = (x^2 - 1)^n$$

$$\Rightarrow \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) = \frac{d^n}{dx^n} Q(x) = Q^{(n)}(x)$$

$$\text{und zeige: } \int_{-1}^1 x^m \cdot Q^{(n)}(x) dx = 0 \quad \forall n > m$$

Für $n = 1 > m = 0$ gilt:

$$\int_{-1}^1 x^m \cdot Q^{(n)}(x) dx = \int_{-1}^1 \underbrace{x^0}_{=1} \cdot Q^{(1)}(x) dx = \int_{-1}^1 2x dx = [x^2]_{-1}^1 = 0$$

Sei nun $n > m \wedge n \geq 2$: Es wird n-mal partiell integriert

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \underbrace{x^m}_u \cdot \underbrace{Q^{(n)}(x)}_{v'} dx &= \underbrace{\left[x^m \cdot Q^{(n-1)}(x) \right]_{-1}^1}_{=0, \text{ da } Q^{(n-1)}(\pm 1)=0} - \int_{-1}^1 (x^m)' \cdot Q^{(n-1)}(x) dx \\
&= (-1)^1 \cdot \int_{-1}^1 \underbrace{(x^m)'}_u \cdot \underbrace{Q^{(n-1)}(x)}_{v'} dx \\
&= (-1)^1 \left(\underbrace{\left[(x^m)' \cdot Q^{(n-2)}(x) \right]_{-1}^1}_{=0, \text{ da } Q^{(n-2)}(\pm 1)=0} - \int_{-1}^1 (x^m)'' \cdot Q^{(n-2)}(x) dx \right) \\
&= (-1)^2 \cdot \int_{-1}^1 (x^m)'' \cdot Q^{(n-2)}(x) dx = \dots \\
&= (-1)^{n-2} \cdot \left(\underbrace{\left[(x^m)^{(n-2)} \cdot Q'(x) \right]_{-1}^1}_{=0, \text{ da } Q'(\pm 1)=0} - \int_{-1}^1 (x^m)^{(n-1)} \cdot Q'(x) dx \right) \\
&= (-1)^{(n-1)} \cdot \int_{-1}^1 \underbrace{(x^m)^{(n-1)}}_u \cdot \underbrace{Q'(x)}_{v'} dx \\
&= (-1)^{n-1} \cdot \left(\underbrace{\left[(x^m)^{(n-1)} \cdot Q(x) \right]_{-1}^1}_{=0, \text{ da } Q(\pm 1)=0} - \int_{-1}^1 (x^m)^{(n)} \cdot Q(x) dx \right) \\
&= (-1)^n \cdot \int_{-1}^1 (x^m)^{(n)} \cdot Q(x) dx = 0, \quad \text{da wegen}
\end{aligned}$$

$$n > m \text{ gilt: } (x^m)^{(n)} \equiv 0$$

$$\text{Damit ist bewiesen: } \int_{-1}^1 x^m \cdot Q^{(n)}(x) dx = 0, \text{ f\"ur } n > m \quad (I)$$

$$\text{und somit auch: } \int_{-1}^1 x^m \cdot P_n(x) dx = 0, \text{ f\"ur } n > m.$$

Skalarprodukt:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 \overline{f(x)} g(x) dx$$

Sind die Legendre-Polynome $P_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ reellwertige Funktionen, so gilt $\forall x \in \mathbb{R} : \overline{P_n(x)} = P_n(x)$ und somit ist $\langle P_n, P_m \rangle = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 P_n(x) \cdot P_m(x) dx$.

Zu zeigen: $\langle P_n, P_m \rangle = 0$ f\"ur $n \neq m$.

Beweis: Wegen $\langle P_n, P_m \rangle = \langle P_m, P_n \rangle \quad \forall n, m$ reicht es aus, den Beweis f\"ur $n > m$ zu f\"uhren.

Setze $Q(x) = (x^2 - 1)^n \Rightarrow P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot Q^{(n)}(x)$, hierbei ist $\deg Q^{(n)}(x) = n$.

Setze $R(x) = (x^2 - 1)^m \Rightarrow P_m(x) = \frac{1}{2^m \cdot m!} \cdot R^{(m)}(x)$, hierbei ist $\deg R^{(m)}(x) = m$.

$$\begin{aligned} \langle P_n, P_m \rangle &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 P_n(x) \cdot P_m(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{1}{2^m \cdot m!} \cdot \int_{-1}^1 R^{(m)}(x) \cdot Q^{(n)}(x) dx \end{aligned}$$

Deshalb genügt es zu zeigen, dass

$$\int_{-1}^1 R^{(m)}(x) \cdot Q^{(n)}(x) dx = 0 \quad \text{ist für } n > m$$

Wegen $\deg R^{(m)}(x) = m$ gibt es Zahlen $r_\mu \in \mathbb{R}, \mu \in \{0, 1, \dots, m\} \wedge r_m \neq 0$, sodass gilt:

$$\begin{aligned} R^{(m)}(x) &= \sum_{\mu=0}^m r_\mu \cdot x^\mu \\ \Rightarrow \int_{-1}^1 R^{(m)}(x) \cdot Q^{(n)}(x) dx &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{\mu=0}^m r_\mu \cdot x^\mu \right) \cdot Q^{(n)}(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{\mu=0}^m (r_\mu \cdot x^\mu) \cdot Q^{(n)}(x) \right) dx \\ &= \sum_{\mu=0}^m \int_{-1}^1 (r_\mu x^\mu) \cdot Q^{(n)}(x) dx \\ &= \sum_{\mu=0}^m \left(r_\mu \cdot \int_{-1}^1 x^\mu \cdot Q^{(n)}(x) dx \right) = \sum_{\mu=0}^m r_\mu \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

denn wegen $n > m$ ist $n > \mu$ für jedes $\mu \in \{0, 1, \dots, m\}$ und deshalb folgt aus (I):

$$\int_{-1}^1 x^\mu \cdot Q^{(n)}(x) dx = 0 \quad \forall \mu$$

Damit ist $\langle P_n, P_M \rangle = 0$ für $n \neq m$ bewiesen. $\square$

Aufgabe 2

Sei $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Alle Funktionen f_n sind in $[0; 1]$ stetig. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [0; 1[\\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

Somit ist die Funktionenfolge (f_n) in $[0; 1]$ konvergent. Die Grenzfunktion f ist an der Stelle $x = 1$ aber nicht stetig.

Nun gilt der Satz:

Ist $f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, so ist auch f stetig.

Hieraus folgt:

Da $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & , \quad x \in [0; 1[\\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$ nicht stetig ist, ist die Konvergenz der Funktionenfolge (f_n) im Intervall $[0; 1]$ auch nicht gleichmäßig.

Ergebnis: Punktweise Konvergenz $\stackrel{i.a.}{\neq}$ gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 3

Laut Formelsammlung gilt:

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha) \\ \Leftrightarrow \sin^3(\alpha) &= \frac{3}{4}\sin(\alpha) - \frac{1}{4}\sin(3\alpha) \end{aligned}$$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x + x) = \sin(2x) \cdot \cos(x) + \cos(2x) \cdot \sin(x) \\ \text{Es gilt: } \sin(2x) &= \sin(x + x) = \sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(x) \cdot \sin(x) \\ \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ \cos(2x) &= \cos(x + x) = \cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \sin(x) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \Rightarrow \sin(3x) &= 2\sin(x)\cos^2(x) + \cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) \\ &= 3\sin(x) \cdot (1 - \sin^2(x)) - \sin^3(x) \\ &= 3\sin(x) - 4\sin^3(x) \\ \Leftrightarrow \sin^3(x) &= \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x) \end{aligned}$$

□

Es geht auch anders:

$\forall x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, da:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos(x) + i \cdot \sin(x) \\ e^{-ix} &= \cos(x) - i \cdot \sin(x) \\ e^{ix} - e^{-ix} &= 2i \cdot \sin(x) \\ \Leftrightarrow \sin(x) &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin^3(x) &= \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \cdot (e^{ix} - e^{-ix})^3 \\ \Leftrightarrow \sin^3(x) &= \frac{i}{8} \cdot (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) \end{aligned}$$

Einschub: Definition (Forster S.251):

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine periodische, über dem Intervall $[0, 2\pi]$ integrierbare Funktion. (*)

Dann heißen die Zahlen

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}$$

die Fourier-Koeffizienten von f und die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx}$$

d.h. die Folge der Partialsummen $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{ikx}$, $n \in \mathbb{N}$ heißt Fourier-

Reihe von f .

Die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \sin^3(x)$ erfüllt die Vor. (*) der Definition.

Berechnung der Fourier-Koeffizienten c_k der Funktion

$$f(x) = \sin^3(x) = \frac{i}{8} \cdot (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}):$$

Bemerkung: Im Folgenden wird häufig verwendet:

$$\int_0^{2\pi} e^{imx} dx = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$\triangle$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin^3(x) \cdot e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow c_k &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i}{8} \cdot \int_0^{2\pi} (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) \cdot e^{-ikx} dx \\ \Leftrightarrow c_k &= \frac{i}{16\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (e^{i(3-k)x} - 3e^{i(1-k)x} + 3e^{-i(1+k)x} - e^{-i(3+k)x}) dx \end{aligned}$$

Fallunterscheidung:

- $k = 3$:

Unter Verwendung von $\triangle$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{i}{16\pi} \cdot \left[\int_0^{2\pi} 1 dx - 3 \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(-2)x} dx + 3 \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(-4)x} dx - \int_0^{2\pi} e^{i(-6)x} dx \right] \\ c_3 &= \frac{i}{16\pi} \cdot 2\pi = \frac{i}{8} \end{aligned}$$

- $k = 1$:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{i}{16\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (e^{i2x} - 3 + 3 \cdot e^{-i2x} - e^{-i4x}) dx \\
c_1 &= \frac{i}{16\pi} \cdot \left[\frac{1}{2i} e^{i2x} - 3x - \frac{3}{2i} \cdot e^{-i2x} + \frac{1}{4i} e^{-i4x} \right]_0^{2\pi} \\
c_1 &= \frac{i}{16\pi} \cdot (-6\pi) = -\frac{3}{8}i
\end{aligned}$$

• $k = -1$:

$$\begin{aligned}
c_{-1} &= \frac{i}{16\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (e^{i4x} - 3e^{i2x} + 3 - e^{-i2x}) dx \\
c_{-1} &= \frac{i}{16\pi} \cdot \left[\frac{1}{4i} e^{i4x} - \frac{3}{2i} e^{i2x} + 3x + \frac{1}{2i} e^{-i2x} \right]_0^{2\pi} \\
c_{-1} &= \frac{i}{16\pi} \cdot 6\pi = \frac{3}{8}i
\end{aligned}$$

• $k = -3$:

$$\begin{aligned}
c_{-3} &= \frac{i}{16\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (e^{i6x} - 3e^{i4x} + 3e^{i2x} - 1) dx \\
c_{-3} &= \frac{i}{16\pi} \cdot \left[\frac{1}{6i} e^{i6x} - \frac{3}{4i} e^{i4x} + \frac{3}{2i} e^{i2x} - x \right]_0^{2\pi} \\
c_{-3} &= \frac{i}{16\pi} \cdot (-2\pi) = -\frac{i}{8}
\end{aligned}$$

Sei nun $k \in \mathbb{Z} \setminus \{3, 1, -1, -3\}$ beliebig $\Rightarrow (3-k), (1-k), (1+k), (3+k) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{i}{16\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (e^{i(3-k)x} - 3e^{i(1-k)x} + 3e^{-i(1+k)x} - e^{-i(3+k)x}) dx \\
\Leftrightarrow c_k &= \frac{i}{16\pi} \cdot 0 = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{3, 1, -1, -3\}
\end{aligned}$$

Ergebnis: $f(x) = \sin^3(x) = c_{-3}e^{i(-3)x} + c_{-1}e^{i(-1)x} + c_1e^{ix} + c_3e^{i3x}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) = \sin^3(x) &= -\frac{i}{8}e^{-3ix} + \frac{3}{8}ie^{-ix} - \frac{3}{8}ie^{ix} + \frac{i}{8}e^{3ix} \\
&= \frac{i}{8}(e^{3ix} - e^{-3ix}) - \frac{3}{8}i(e^{ix} - e^{-ix}) \\
&= \frac{i}{8} \cdot 2i \cdot \sin(3x) - \frac{3}{8}i \cdot 2i \cdot \sin(x) \\
&= -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x) \\
\Rightarrow \sin^3(x) &= \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a)

Berechne $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}$

Man betrachte die Fourier-Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^3}$$

und berechne zunächst die Summe dieser Reihe.

Seien $f_k(x) = \frac{\sin(kx)}{k^3} \Rightarrow \|f_k\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{k^3}$ (Supremumsnorm) und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{\mathbb{R}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}}_{\text{konv.}} < \infty$$

Dann folgt aus dem Konvergenzkriterium von Weierstraß:

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^3}$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\mathbb{R}$

gegen eine Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^3}$.

Berechne die Reihe der Ableitungen:

$$F'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^3} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(kx)}{k^3} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} \quad (I)$$

Seien $g_k(x) = \frac{\cos(kx)}{k^2} \Rightarrow \|g_k\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{k^2}$ und es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{\mathbb{R}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\text{konv.}} < \infty$$

Dann folgt wie oben nach Weierstraß:

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\mathbb{R}$

gegen eine Funktion $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$ (II)

Wegen (I) und (II) ist $F'(x) = G(x)$. Laut Vorlesung besitzt die Funktion

$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die Darstellung $G(x) = \left(\frac{x - \pi}{2} \right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$ für $x \in [0; 2\pi]$.

Deshalb gilt $\forall x \in [0; 2\pi]$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{(x - \pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \\ \Rightarrow F(x) &= \frac{1}{12}(x - \pi)^3 - \frac{\pi^2}{12}x + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Bestimmung der Konstanten c :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} F(x) dx &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{12}(x - \pi)^3 - \frac{\pi^2}{12}x + c \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{48}(x - \pi)^4 - \frac{\pi^2}{24}x^2 + cx \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{48}\pi^4 - \frac{\pi^2}{24} \cdot 4\pi^2 + c \cdot 2\pi - \frac{1}{48}\pi^4 + \frac{\pi^2}{24} \cdot 4\pi^2 \\
 &= c \cdot 2\pi \quad (III)
 \end{aligned}$$

Andererseits gilt (wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $(f_k) = \left(\frac{\sin(kx)}{k^3} \right)$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, stetiger Funktionen f_k auf $\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} F(x) dx &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^3} \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\sin(kx)}{k^3} dx \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left[-\frac{\cos(kx)}{k^4} \right]_0^{2\pi} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\cos(k \cdot 2\pi)}{k^4} + \frac{\cos(0)}{k^4} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4} \right) \\
 &= 0 \quad (IV)
 \end{aligned}$$

Aus (III) und (IV) folgt: $c \cdot 2\pi = 0 \Leftrightarrow c = 0$

Ergebnis:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^3} = \frac{1}{12}(x - \pi)^3 - \frac{\pi^2}{12}x \quad x \in [0; 2\pi]$$

Bemerkung: F lässt sich durch die Festsetzung $F(x + 2n\pi) = F(x)$ für $n \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0; 2\pi[$ auf ganz $\mathbb{R}$ periodisch fortsetzen.

Zitat aus der Vorlesung (Satz):

Sei f eine 2π -periodische, über $[0; 2\pi]$ integrierbare Funktion. Dann gilt:

Die Fourier-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx}$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen f ,

und es gilt die Gleichheit:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \quad (\text{Vollständigkeitsrelation})$$

(Dabei sind c_k die Fourier-Koeffizienten von f)

Da die Funktion F die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, darf die Vollständig-

keitsrelation auf F angewendet werden. Berechne dazu:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{12}(x-\pi)^3 - \frac{\pi^2}{12}x \right) dx \\
c_0 &= \frac{1}{24\pi} \cdot \left[\frac{1}{4}(x-\pi)^4 - \frac{\pi^2}{2}x^2 \right]_0^{2\pi} \\
c_0 &= \frac{1}{24\pi} \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot \pi^4 - \frac{\pi^2}{2} \cdot 4\pi^2 - \frac{1}{4} \cdot (-\pi)^4 \right] \\
c_0 &= \frac{1}{24\pi} \cdot \left[\frac{1}{4}\pi^4 - 2\pi^4 - \frac{1}{4}\pi^4 \right] = -\frac{2\pi^4}{24\pi} = -\frac{\pi^3}{12}
\end{aligned}$$

für $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{24\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{\left((x-\pi)^3 - \pi^2 x \right)}_u \cdot \underbrace{e^{-ikx}}_{v'} dx \\
\Leftrightarrow 24\pi \cdot c_k &= \left[\left((x-\pi)^3 - \pi^2 x \right) \cdot \frac{1}{-ik} \cdot e^{-ikx} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \left(3(x-\pi)^2 - \pi^2 \right) \cdot \frac{1}{-ik} \cdot e^{-ikx} dx \\
&= \underbrace{\left(\pi^3 - 2\pi^3 \right) \cdot \frac{1}{-ik} \cdot 1 - (-\pi)^3 \cdot \frac{1}{-ik} \cdot 1}_{=0} + \frac{1}{ik} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\underbrace{3 \cdot (x-\pi)^2 - \pi^2}_u \right) \cdot \underbrace{e^{-ikx}}_{v'} dx \\
&= \frac{1}{ik} \cdot \left[\left[\left(3 \cdot (x-\pi)^2 - \pi^2 \right) \cdot \frac{1}{-ik} \cdot e^{-ikx} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 6(x-\pi) \cdot \frac{1}{-ik} \cdot e^{-ikx} dx \right] \\
&= \frac{1}{ik} \cdot \left[\left(3\pi^2 - \pi^2 \right) \cdot \frac{1}{-ik} \cdot 1 - \left(3\pi^2 - \pi^2 \right) \cdot \frac{1}{-ik} \cdot 1 \right] + \frac{1}{ik} \cdot \frac{6}{ik} \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{(x-\pi)}_u \cdot \underbrace{e^{-ikx}}_{v'} dx \\
&= -\frac{6}{k^2} \cdot \left[\left[(x-\pi) \cdot \frac{1}{-ik} \cdot e^{-ikx} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{-ik} \cdot e^{-ikx} dx \right] \\
&= -\frac{6}{k^2} \cdot \left[\pi \cdot \frac{1}{-ik} \cdot 1 - (-\pi) \cdot \frac{1}{-ik} \cdot 1 \right] - \frac{6}{k^2} \cdot \frac{1}{ik} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-ikx} dx}_{=0} \\
&= -\frac{6}{k^2} \cdot 2\pi \cdot 1 \frac{1}{-ik} \\
&= \frac{6 \cdot 2\pi}{k^2 \cdot i \cdot k} = \frac{12\pi}{i \cdot k^3} \cdot \frac{i}{i} = -\frac{12\pi}{k^3} \cdot i
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
24\pi \cdot c_k &= -\frac{12\pi}{k^3} \cdot i \\
c_k &= -\frac{12\pi}{k^3 \cdot 24\pi} \cdot i \\
c_k &= -\frac{1}{2k^3} \cdot i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |c_k|^2 &= c_k \cdot \overline{c_k} = -\frac{1}{2k^3} \cdot i \cdot \frac{1}{2k^3} \cdot i = \frac{1}{4k^6} \\
\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= |c_0|^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \\
&= \left(\frac{\pi^3}{12}\right)^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^6} \\
&= \frac{\pi^6}{144} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} \quad (V)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |F(x)|^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{12}(x-\pi)^3 - \frac{\pi^2}{12}x \right)^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{12^2} \cdot \int_0^{2\pi} ((x-\pi)^6 - 2\pi^2 x(x-\pi)^3 + \pi^4 x^2) dx \\
&= \frac{1}{288\pi} \cdot \int_0^{2\pi} ((x-\pi)^6 - 2\pi^2(x^4 - 3\pi x^3 + 3\pi^2 x^2 - \pi^3 x) + \pi^4 x^2) dx \\
&= \frac{1}{288\pi} \cdot \left[\frac{1}{7}(x-\pi)^7 - 2\pi^2 \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}\pi x^4 + \pi^2 x^3 - \frac{1}{2}\pi^3 x^2 \right) + \frac{1}{3}\pi^4 x^3 \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{288\pi} \cdot \left[\frac{1}{7}\pi^7 - 2\pi^2 \left(\frac{32}{5}\pi^5 - 12\pi^5 + 8\pi^5 - 2\pi^5 \right) + \frac{8}{3}\pi^7 - \frac{1}{7}(-\pi)^7 \right] \\
&= \frac{1}{288\pi} \cdot \left[\frac{2}{7}\pi^7 - 2\pi^2 \cdot \frac{2}{5}\pi^5 + \frac{8}{3}\pi^7 \right] \\
&= \frac{1}{288\pi} \cdot \frac{30 - 84 + 280}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \pi^7 \\
&= \frac{226 \cdot \pi^7}{288\pi \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{113\pi^6}{114 \cdot 105} \quad (VI)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(V) \overset{\wedge(VI)}{\Rightarrow} \frac{\pi^6}{144} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} &= \frac{113\pi^6}{144 \cdot 105} \\
\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} &= \frac{113\pi^6 - 105\pi^6}{144 \cdot 105} \cdot 2 \\
\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} &= \frac{16\pi^6}{144 \cdot 105} = \frac{\pi^6}{9 \cdot 105} = \frac{\pi^6}{945}
\end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

(b)

Berechne $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$

In der Vorlesung wurde bewiesen:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{für } 0 < x < 2\pi$$

Setzt man $f(0) = 0$ und $f(x + 2n\pi) = f(x)$ für $n \in \mathbb{Z} \wedge x \in [0, 2\pi[$, so wird dadurch f auf ganz $\mathbb{R}$ periodisch fortgesetzt.

Bestimme die Fourier-Koeffizienten $c_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot e^{-ikx} dx$ von f in der

Reihe $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx}$:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} dx = \frac{1}{4\pi} \cdot \left[\pi x - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{2\pi} \\ c_0 &= \frac{1}{4\pi} \cdot \left[2\pi^2 - \frac{1}{2} 4\pi^2 \right] = 0, \quad \text{also: } c_0 = 0 \end{aligned}$$

Berechnung von c_k für $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \cdot e^{-ikx} dx = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \underbrace{(\pi - x)}_u \cdot \underbrace{e^{-ikx}}_{v'} dx \\ c_k &= \frac{1}{4\pi} \left[\left[(\pi - x) \cdot \frac{1}{-ik} \cdot e^{-ikx} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-1) \cdot \frac{1}{-ik} \cdot e^{-ikx} dx \right] \\ 4\pi \cdot c_k &= -\pi \cdot \frac{1}{-ik} \cdot 1 - \pi \cdot \frac{1}{-ik} - \frac{1}{ik} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-ikx} dx}_{=0} \\ 4\pi \cdot c_k &= \frac{2\pi}{ik} \\ \Leftrightarrow c_k &= \frac{1}{2ik} = \frac{-i}{2k}, \quad \text{also: } c_k = \frac{-i}{2k}, \quad k \neq 0 \end{aligned}$$

Berechne $|c_0|^2 = 0$

für $k \neq 0$:

$$\begin{aligned}
 |c_k|^2 &= c_k \cdot \overline{c_k} = \frac{-i}{2k} \cdot \frac{i}{2k} = \frac{1}{(2k)^2} \\
 \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2k)^2} + 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \\
 \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} \quad (1) \\
 \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi-x}{2} \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{8\pi} \cdot \int_0^{2\pi} 2\pi(x-\pi)^2 dx \\
 &= \frac{1}{8\pi} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (x-\pi)^3 \right]_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot [\pi^3 - (-\pi)^3] \\
 \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx &= \frac{2\pi^3}{24\pi} = \frac{\pi^2}{12} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Wegen (1) und (2) ergibt sich aus der Vollständigkeitsrelation

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \\
 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} &= \frac{\pi^2}{12} \\
 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} &= \frac{\pi^2}{24}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 5

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx} \quad \text{und} \quad g = \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l \cdot e^{ilx}$$

seien 2π -periodische stetige, stückweise stetig differenzierbare Funktionen.

Bestimme die Fourierreihe von $f \cdot g$.

Berechne dazu:

$$\begin{aligned}
 f \cdot g &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx} \right) \cdot \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l \cdot e^{ilx} \right) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_k \cdot d_l \cdot e^{i(k+l)x} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{k,l} \cdot e^{i(k+l)x} \quad \text{mit } a_{k,l} = c_k \cdot d_l
 \end{aligned}$$

Ansatz für die Fourierreihe von $f \cdot g$:

$$f \cdot g = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j \cdot e^{ijx}$$

$$\text{mit } \gamma_j = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (f \cdot g)(x) \cdot e^{-ijx} dx$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten γ_j von $f \cdot g$ für bel. $j \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) \cdot e^{-ijx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{k,l} \cdot e^{i(k+l)x} \right) \cdot e^{-ijx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(a_{k,l} \cdot e^{i(k+l)x} \cdot e^{-ijx} \right) dx \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{k,l} \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(k+l-j)x} dx \right] \quad (*) \end{aligned}$$

*: nach Voraussetzung sind Integration und Limesbildung miteinander vertauschbar (vergl. hierzu Forster S.252)

1. Fall: $k + l - j \neq 0 \Leftrightarrow j \neq k + l$:

Wegen $\int_0^{2\pi} e^{imx} dx = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist $\int_0^{2\pi} e^{i(k+l-j)x} dx = 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \gamma_j = 0$. Also:

$$\gamma_j = 0 \quad \text{für } j \neq k + l$$

2. Fall: $k + l - j = 0 \Leftrightarrow j = k + l \Leftrightarrow l = j - k$:

$$\begin{aligned} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \gamma_j &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{k,l} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 dx}_{=2\pi} \right] \\ \Leftrightarrow \gamma_j &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{k,l} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{k,l} \\ \Leftrightarrow \gamma_j &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k,j-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot d_{j-k} \quad \text{für jedes } j \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Fourierreihe von $f \cdot g$ lautet:

$$f \cdot g = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j \cdot e^{ijx}$$

$$\text{mit } \gamma_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot d_{j-k}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

□