

Übungsblatt 2
Jan Hendrik Dithmar
Übungsgruppe 1 - Mo, 14-16 Uhr
Janko Böhm

Aufgabe 1

$\mathbb{R}$ -Vektorraum $U = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ mit der Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$,
also $\dim U = 4$.

(a)

Skalarprodukt $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)x^2 dx$, $x^2 \geq 0$ und stetig in $[-1, 1]$.

Bestimmung einer Orthonormalbasis von U :

$\{1 = x^0, x^1, x^2, x^3\}$ Basis von $U = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

$\{b_0(x), b_1(x), b_2(x), b_3(x)\}$ Orthogonalbasis von U .

$\{e_0(x), e_1(x), e_2(x), e_3(x)\}$ Orthonormalbasis von U .

Beginn: $1 = b_0(x) \Rightarrow e_0(x) = \frac{1}{\|b_0(x)\|} \cdot b_0(x)$.

Fortsetzung:

$$b_{n+1}(x) = x^{n+1} - \sum_{\nu=0}^n \langle x^{n+1}, e_\nu \rangle e_\nu(x) \quad n = 0, 1, 2$$

$$e_{n+1}(x) = \frac{1}{\|b_{n+1}(x)\|} \cdot b_{n+1}(x)$$

wobei $\|b_{n+1}(x)\| = \sqrt{\langle b_{n+1}(x), b_{n+1}(x) \rangle}$.

0. Bestimmung von $e_0(x)$:

$$b_0(x) = 1$$

$$\langle b_0, b_0 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \|b_0\| = \sqrt{\langle b_0, b_0 \rangle} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow e_0(x) = \frac{1}{\|b_0\|} \cdot b_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \cdot 1 = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$e_0(x) = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

1. Bestimmung von $e_1(x)$:

$$\begin{aligned}b_1(x) &= x - \langle x, e_0 \rangle e_0(x) \\ \langle x, e_0 \rangle &= \langle x, \frac{1}{2}\sqrt{6} \rangle = \int_{-1}^1 x \frac{1}{2}\sqrt{6}x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 \quad \text{da} \quad \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 \\ \Rightarrow b_1(x) &= x \\ \langle b_1, b_1 \rangle &= \langle x, x \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x \cdot x^2 dx = \int_{-1}^1 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^1 = \frac{2}{5} \\ \Rightarrow \|b_1\| &= \sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle} = \sqrt{\frac{2}{5}} \\ \Rightarrow e_1(x) &= \frac{1}{\|b_1\|} \cdot b_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5}}} \cdot x = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot x = \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot x \\ e_1(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot x\end{aligned}$$

2. Bestimmung von $e_2(x)$:

$$\begin{aligned}
b_2(x) &= x^2 - \sum_{\nu=0}^1 \langle x^2, e_\nu \rangle e_\nu(x) \\
b_2(x) &= x^2 - \langle x^2, e_0 \rangle e_0(x) - \langle x^2, e_1 \rangle e_1(x) \\
\langle x^2, e_0 \rangle &= \langle x^2, \frac{1}{2}\sqrt{6} \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \frac{1}{2}\sqrt{6} x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{6} \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{1}{2}\sqrt{6} \left[\frac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{2}{5} \\
&= \frac{1}{5}\sqrt{6} \\
\langle x^2, e_1 \rangle &= \langle x^2, \frac{1}{2}\sqrt{10}x \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot x \cdot x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot \int_{-1}^1 x^5 dx = \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot 0 = 0 \\
\Rightarrow b_2(x) &= x^2 - \frac{1}{5}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{6} = x^2 - \frac{3}{5} \\
\langle b_2, b_2 \rangle &= \langle x^2 - \frac{3}{5}, x^2 - \frac{3}{5} \rangle = \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{3}{5} \right)^2 x^2 dx \\
&= \int_{-1}^1 \left(x^6 - \frac{6}{5}x^4 + \frac{9}{25}x^2 \right) dx = \left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{6}{25}x^5 + \frac{3}{25}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{2}{7} - \frac{6}{25} = \frac{50 - 42}{7 \cdot 25} \\
&= \frac{8}{175} \\
\Rightarrow \|b_2\| &= \sqrt{\langle b_2, b_2 \rangle} = \sqrt{\frac{8}{175}} \Rightarrow e_2(x) = \frac{1}{\|b_2\|} \cdot b_2(x) \\
\Rightarrow e_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{175}}} \cdot \left(x^2 - \frac{3}{5} \right) = \sqrt{\frac{175}{8}} \cdot \left(x^2 - \frac{3}{5} \right) = \frac{5}{4}\sqrt{14} \cdot \left(x^2 - \frac{3}{5} \right) \\
e_2(x) &= \frac{5}{4}\sqrt{14} \cdot \left(x^2 - \frac{3}{5} \right)
\end{aligned}$$

3. Bestimmung von $e_3(x)$:

$$\begin{aligned}
b_3(x) &= x^3 - \sum_{\nu=0}^2 \langle x^3, e_\nu \rangle e_\nu(x) \\
b_3(x) &= x^3 - \langle x^3, e_0 \rangle e_0(x) - \langle x^3, e_1 \rangle e_1(x) - \langle x^3, e_2 \rangle e_2(x) \\
\langle x^3, e_0 \rangle &= \langle x^3, \frac{1}{2}\sqrt{6} \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \frac{1}{2}\sqrt{6} x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{6} \int_{-1}^1 x^5 dx \\
\langle x^3, e_0 \rangle &= 0 \\
\langle x^3, e_1 \rangle &= \langle x^3, \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot x \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot x \cdot x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot \int_{-1}^1 x^6 dx \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot \left[\frac{1}{7} x^7 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{7}\sqrt{10} \\
\langle x^3, e_2 \rangle &= \langle x^3, \frac{5}{4}\sqrt{14} \cdot \left(x^2 - \frac{3}{5} \right) \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \cdot \frac{5}{4}\sqrt{14} \cdot \left(x^2 - \frac{3}{5} \right) \cdot x^2 dx \\
&= \frac{5}{4}\sqrt{14} \cdot \int_{-1}^1 x^5 \cdot \left(x^2 - \frac{3}{5} \right) dx \\
&= \frac{5}{4}\sqrt{14} \cdot \int_{-1}^1 \left(x^7 - \frac{3}{5} x^5 \right) dx \\
\langle x^3, e_2 \rangle &= 0 \\
\Rightarrow b_3(x) &= x^3 - \frac{1}{7}\sqrt{10} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot x = x^3 - \frac{5}{7}x \\
\langle b_3, b_3 \rangle &= \langle x^3 - \frac{5}{7}x, x^3 - \frac{5}{7}x \rangle = \int_{-1}^1 \left(x^3 - \frac{5}{7}x \right)^2 \cdot x^2 dx \\
&= \int_{-1}^1 \left(x^8 - \frac{10}{7}x^6 + \frac{25}{49}x^4 \right) dx = \left[\frac{1}{9}x^9 - \frac{10}{49}x^7 + \frac{5}{49}x^5 \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{9} - \frac{5}{49} \right) \cdot 2 \\
&= \frac{49 - 45}{9 \cdot 49} \cdot 2 = \frac{8}{441} \\
\Rightarrow \|b_3\| &= \sqrt{\langle b_3, b_3 \rangle} = \sqrt{\frac{8}{441}} \\
\Rightarrow e_3(x) &= \frac{1}{\|b_3\|} \cdot b_3(x) = \sqrt{\frac{441}{8}} \cdot b_3(x) = \frac{21}{2 \cdot \sqrt{2}} b_3(x) \\
e_3(x) &= \frac{21}{4} \sqrt{2} \cdot \left(x^3 - \frac{5}{7}x \right)
\end{aligned}$$

Ergebnis:

$\{e_0(x), e_1(x), e_2(x), e_3(x)\}$ ist eine Orthonormalbasis des Vektorraums $U = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)x^2 dx$.

(b)

0. Bestimmung von $e_0(x)$:

$$b_0(x) = 1$$

$$\langle b_0, b_0 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1}{3} \right) \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \|b_0\| = \sqrt{\langle b_0, b_0 \rangle} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow e_0(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot b_0(x)$$

$$\Leftrightarrow e_0(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

1. Bestimmung von $e_1(x)$:

$$b_1(x) = x - \langle x, e_0 \rangle e_0(x)$$

$$\langle x, e_0 \rangle = \langle x, \frac{1}{2}\sqrt{3} \rangle = \int_{-1}^1 x \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot (1 - x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow b_1(x) = x$$

$$\begin{aligned} \langle b_1, b_1 \rangle &= \langle x, x \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x \cdot (1 - x^2) dx = \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \cdot 2 = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|b_1\| = \sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle} = \sqrt{\frac{4}{15}} = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

$$\Rightarrow e_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{15} \cdot b_1(x)$$

$$\Leftrightarrow e_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{15} \cdot x$$

2. Bestimmung von $e_2(x)$:

$$\begin{aligned}
b_2(x) &= x^2 - \langle x^2, e_0 \rangle e_0(x) - \langle x^2, e_1 \rangle e_1(x) \\
\langle x^2, e_0 \rangle &= \langle x^2, \frac{1}{2}\sqrt{3} \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot (1-x^2) dx \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) dx = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{4}{15} = \frac{2}{15}\sqrt{3} \\
\langle x^2, e_1 \rangle &= \langle x^2, \frac{1}{2}\sqrt{15} \cdot x \rangle = \int_{-1}^1 x^2 \frac{1}{2}\sqrt{15} \cdot x \cdot (1-x^2) dx \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{15} \cdot \int_{-1}^1 (x^3 - x^5) dx = \frac{1}{2}\sqrt{15} \cdot 0 = 0 \\
\Rightarrow b_2(x) &= x^2 - \frac{2}{15}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = x^2 - \frac{1}{5} \\
\langle b_2, b_2 \rangle &= \langle x^2 - \frac{1}{5}, x^2 - \frac{1}{5} \rangle = \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{5}\right)^2 \cdot (1-x^2) dx \\
&= \int_{-1}^1 \left(x^4 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{25}\right) \cdot (1-x^2) dx \\
&= \int_{-1}^1 \left(-x^6 + \frac{7}{5}x^4 - \frac{11}{25}x^2 + \frac{1}{25}\right) dx \\
&= \left[-\frac{1}{7}x^7 + \frac{7}{25}x^5 - \frac{11}{75}x^3 + \frac{1}{25}x\right]_{-1}^1 \\
&= \frac{-75 + 147 - 77 + 21}{7 \cdot 75} \cdot 2 = \frac{32}{525} \\
\Rightarrow \|b_2\| &= \sqrt{\frac{32}{525}} \Rightarrow e_2(x) = \sqrt{\frac{525}{32}} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{5}\right) \\
e_2(x) &= \frac{5}{8}\sqrt{42} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{5}\right)
\end{aligned}$$

3. Bestimmung von $e_3(x)$:

$$\begin{aligned}
b_3(x) &= x^3 - \langle x^3, e_0 \rangle e_0(x) - \langle x^3, e_1 \rangle e_1(x) - \langle x^3, e_2 \rangle e_2(x) \\
\langle x^3, e_0 \rangle &= \langle x^3, \frac{1}{2}\sqrt{3} \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot (1-x^2) dx \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{3} \int_{-1}^1 (x^3 - x^5) dx = 0 \\
\langle x^3, e_1 \rangle &= \langle x^3, \frac{1}{2}\sqrt{15} \cdot x \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \frac{1}{2}\sqrt{15} \cdot x \cdot (1-x^2) dx \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{15} \cdot \int_{-1}^1 (x^4 - x^6) dx = \frac{1}{2}\sqrt{15} \cdot \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \right]_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{15} \cdot \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right] \cdot 2 = \sqrt{15} \frac{2}{35} = \frac{2}{35}\sqrt{15} \\
\langle x^3, e_2 \rangle &= \langle x^3, \frac{5}{8}\sqrt{42} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{5}\right) \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \frac{5}{8}\sqrt{42} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{5}\right) \cdot (1-x^2) dx \\
&= \frac{5}{8}\sqrt{42} \cdot \int_{-1}^1 \left(-x^7 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{1}{5}x^3\right) dx = \frac{5}{8}\sqrt{42} \cdot 0 = 0 \\
\Rightarrow b_3(x) &= x^3 - \frac{2}{35}\sqrt{15} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{15} \cdot x = x^3 - \frac{3}{7}x \\
\langle b_3, b_3 \rangle &= \langle x^3 - \frac{3}{7}x, x^3 - \frac{3}{7}x \rangle = \int_{-1}^1 \left(x^3 - \frac{3}{7}x\right)^2 \cdot (1-x^2) dx \\
&= \int_{-1}^1 \left(x^6 - \frac{6}{7}x^4 + \frac{9}{49}x^2\right) \cdot (1-x^2) dx \\
&= \int_{-1}^1 \left(-x^8 + \frac{13}{7}x^6 - \frac{51}{49}x^4 + \frac{9}{49}x^2\right) dx \\
&= \left[-\frac{1}{9}x^9 + \frac{13}{49}x^7 - \frac{51}{245}x^5 + \frac{9}{49}x^3\right]_{-1}^1 \\
&= \left(-\frac{1}{9} + \frac{13}{49} - \frac{51}{245}\right) \cdot 2 \\
&= \frac{-245 + 720 - 459}{9 \cdot 49 \cdot 5} \cdot 2 = \frac{32}{2205} \\
\Rightarrow \|b_3\| &= \sqrt{\frac{32}{2205}} \\
\Rightarrow e_3(x) &= \frac{21}{8}\sqrt{10} \cdot \left(x^3 - \frac{3}{7}x\right)
\end{aligned}$$

Ergebnis:

$\{e_0(x), e_1(x), e_2(x), e_3(x)\}$ ist eine Orthonormalbasis des Vektorraums $U = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

bezüglich des Skalarprodukts $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x^2)dx$.

Aufgabe 2

(a)

$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$; $U = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ UR von V .

Auf Aufgabe 1 (a):

$\{e_0(x), e_1(x), e_2(x), e_3(x)\}$ ist eine Orthonormalbasis von U mit

$$\begin{aligned} e_0(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{6} \\ e_1(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot x \\ e_2(x) &= \frac{5}{4}\sqrt{14} \cdot \left(x^2 - \frac{3}{5}\right) \\ e_3(x) &= \frac{21}{4}\sqrt{2} \cdot \left(x^3 - \frac{5}{7}x\right) \end{aligned}$$

bezügl. des Skalarprodukts $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)x^2dx$ (1)

Sei $f = x^2 \cdot (x^2 - 1) \in V$

Für die orthogonale Projektion $\pi_1(f) \in U$ von f auf U bezügl. des Skalarproduktes (1) gilt:

$$\pi_1(f) = \sum_{\nu=0}^3 \langle f, e_\nu \rangle e_\nu$$

Für $f = x^2 \cdot (x^2 - 1) = x^4 - x^2$ folgt:

$$\begin{aligned} \langle f, e_\nu \rangle &= \langle x^4 - x^2, e_\nu \rangle = \langle x^4, e_\nu \rangle - \langle x^2, e_\nu \rangle \\ \Rightarrow \pi_1(f) &= \sum_{\nu=0}^3 \langle x^4, e_\nu \rangle e_\nu - \sum_{\nu=0}^3 \langle x^2, e_\nu \rangle e_\nu \end{aligned}$$

Aus Aufgabe 1 (a):

$$\langle x^2, e_0 \rangle = \frac{1}{5}\sqrt{6} \wedge \langle x^2, e_1 \rangle = 0.$$

$$\begin{aligned} \langle x^2, e_2 \rangle &= \int_{-1}^1 x^2 \frac{5}{4}\sqrt{14} \cdot \left(x^2 - \frac{3}{5}\right) \cdot x^2 dx \\ &= \frac{5}{4}\sqrt{14} \cdot \int_{-1}^1 \left(x^6 - \frac{3}{5}x^4\right) dx = \frac{5}{4}\sqrt{14} \cdot \left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{3}{25}x^5\right]_{-1}^1 \\ &= \frac{5}{4}\sqrt{14} \left(\frac{1}{7} - \frac{3}{25}\right) \cdot 2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 7 \cdot 25} \cdot \sqrt{14} \\ &= \frac{2}{35}\sqrt{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x^2, e_3 \rangle &= \int_{-1}^1 x^2 \cdot \frac{21}{4}\sqrt{2} \cdot \left(x^3 - \frac{5}{7}x\right) \cdot x^2 dx = \frac{21}{4}\sqrt{2} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{\nu=0}^3 \langle x^2, e_\nu \rangle e_\nu &= \frac{1}{5}\sqrt{6} \frac{1}{2}\sqrt{6} + \frac{2}{35}\sqrt{14} \frac{5}{4}\sqrt{14} \cdot \left(x^2 - \frac{3}{5}\right) \\ &= \frac{3}{5} + \left(x^2 - \frac{3}{5}\right) = x^2 \quad (I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x^4, e_0 \rangle &= \int_{-1}^1 x^4 \frac{1}{2}\sqrt{6} x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \int_{-1}^1 x^6 dx = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \left(\frac{1}{7}x^7\right)_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{7}\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x^4, e_1 \rangle &= \int_{-1}^1 x^4 \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot x \cdot x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x^4, e_2 \rangle &= \int_{-1}^1 x^4 \frac{5}{4}\sqrt{14} \cdot \left(x^2 - \frac{3}{5}\right) x^2 dx = \frac{5}{4}\sqrt{14} \cot \int_{-1}^1 \left(x^8 - \frac{3}{5}x^6\right) dx \\ &= \frac{5}{4}\sqrt{14} \cdot \left[\frac{1}{9}x^9 - \frac{3}{35}x^7\right]_{-1}^1 = \frac{5}{4}\sqrt{14} \cdot \frac{35 - 27}{9 \cdot 35} = \frac{5 \cdot 8}{2 \cdot 9 \cdot 35} \cdot \sqrt{14} \\ &= \frac{4}{63}\sqrt{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x^4, e_3 \rangle &= \int_{-1}^1 x^4 \frac{21}{4}\sqrt{2} \cdot \left(x^3 - \frac{5}{7}x\right) \cdot x^2 dx \\ &= \frac{21}{4}\sqrt{2} \cdot \int_{-1}^1 \left(x^9 - \frac{5}{7}x^7\right) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

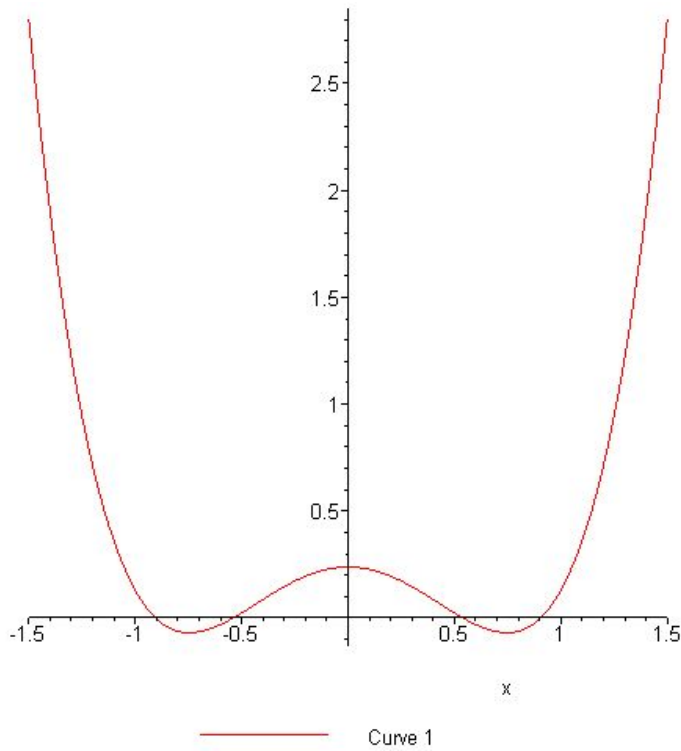


Abbildung 1: Zeichnung zu Aufgabe 2a

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \sum_{\nu=0}^3 \langle x^4, e_\nu \rangle e_\nu &= \frac{1}{7} \sqrt{6} \frac{1}{2} \sqrt{6} + \frac{4}{63} \sqrt{14} \frac{5}{4} \sqrt{14} \cdot \left(x^2 - \frac{3}{5} \right) \\
 &= \frac{3}{7} + \frac{5 \cdot 14}{63} \cdot \left(x^2 - \frac{3}{5} \right) \\
 &= \frac{3}{7} + \frac{10}{9} \cdot \left(x^2 - \frac{3}{5} \right) \\
 &= \frac{10}{9} x^2 - \frac{5}{21} \quad (II) \\
 \stackrel{(I),(II)}{\implies} \pi_1(f) &= \frac{10}{9} x^2 - \frac{5}{21} - x^2 = \frac{1}{9} x^2 - \frac{5}{21} \\
 \Rightarrow f - \pi_1(f) &= x^4 - x^2 - \left(\frac{1}{9} x^2 - \frac{5}{21} \right) \\
 \Leftrightarrow f - \pi_1(f) &= x^4 - \frac{10}{9} x^2 + \frac{5}{21}
 \end{aligned}$$

(b)

Aus Aufgabe 1 (b):

$\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ ist eine Orthonormalbasis von $U = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ mit

$$\begin{aligned} e_0(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ e_1(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{15}x \\ e_2(x) &= \frac{5}{8}\sqrt{42}\left(x^2 - \frac{1}{5}\right) \\ e_3(x) &= \frac{21}{8}\sqrt{10}\left(x^3 - \frac{3}{7}x\right) \end{aligned}$$

bezügl. des Skalarprodukts $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)(1-x^2)dx$ (2).

Sei $f = x^2(x^2 - 1) \in V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$.

Für die orthogonale Projektion $\pi_2(f) \in U$ von f auf U bezügl. des Skalarproduktes (2) gilt:

$$\begin{aligned}
\pi_2(f) &= \sum_{\nu=0}^3 \langle f, e_\nu \rangle e_\nu \\
\langle f, e_0 \rangle &= \int_{-1}^1 x^2(x^2-1) \frac{1}{2} \sqrt{3} (1-x^2) dx \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \int_{-1}^1 (-x^6 + 2x^4 - x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{3} \left[-\frac{1}{7} x^7 + \frac{2}{5} x^5 - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 \\
&= \sqrt{3} \frac{-15 + 42 - 35}{7 \cdot 5 \cdot 3} \\
&= -\frac{8}{105} \sqrt{3} \\
\langle f, e_1 \rangle &= \int_{-1}^1 x^2(x^2-1) \frac{1}{2} \sqrt{15} x (1-x^2) dx = 0 \\
\langle f, e_2 \rangle &= \int_{-1}^1 x^2(x^2-1) \frac{5}{8} \sqrt{42} \left(x^2 - \frac{1}{5} \right) (1-x^2) dx \\
&= \frac{5}{8} \sqrt{42} \cdot \int_{-1}^1 \left(x^4 - \frac{1}{5} x^2 \right) \cdot (-x^4 + 2x^2 - 1) dx \\
&= \frac{5}{8} \sqrt{42} \cdot \int_{-1}^1 \left(-x^8 + \frac{11}{5} x^6 - \frac{7}{5} x^4 + \frac{1}{5} x^2 \right) dx \\
&= \frac{5}{8} \sqrt{42} \cdot \left[-\frac{1}{9} x^9 + \frac{11}{35} x^7 - \frac{7}{25} x^5 + \frac{1}{15} x^3 \right]_{-1}^1 \\
&= \frac{5}{4} \sqrt{42} \cdot \frac{-175 + 495 - 441 + 105}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} \\
&= -\frac{5 \cdot 16}{4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} \cdot \sqrt{42} = -\frac{4}{315} \sqrt{42} \\
\langle f, e_3 \rangle &= \int_{-1}^1 x^2(x^2-1) \cdot \frac{21}{8} \sqrt{10} \left(x^3 - \frac{3}{7} x \right) (1-x^2) dx = 0 \\
\Rightarrow \pi_2(f) &= -\frac{8}{105} \sqrt{3} \frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{4}{315} \sqrt{42} \frac{5}{8} \sqrt{42} \left(x^2 - \frac{1}{5} \right) \\
\pi_2(f) &= -\frac{4}{35} - \frac{4 \cdot 42 \cdot 5}{315 \cdot 8} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{5} \right) \\
\pi_2(f) &= -\frac{4}{35} - \frac{1}{3} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{5} \right) = -\frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{21} \\
\Rightarrow f - \pi_2(f) &= x^4 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{21}
\end{aligned}$$

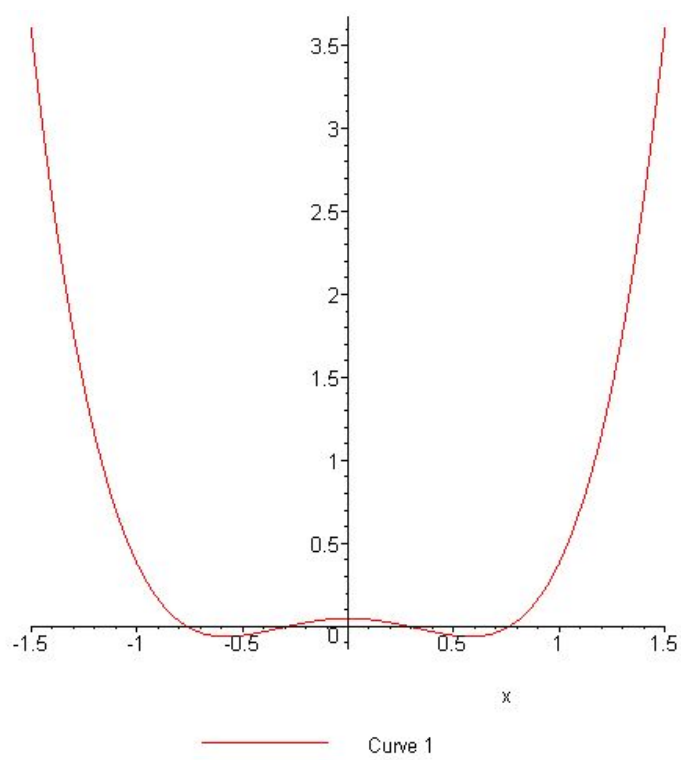


Abbildung 2: Zeichnung zu Aufgabe 2b

Aufgabe 4

Gegeben: $A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M(n \times n, \mathbb{R}), n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

Alle Matrizen A_n sind symmetrisch.

Bez.: A_k sei die linke obere k -reihige Teilmatrix von A_n .

Nach dem Hauptminoren-Kriterium für Definitheit gilt dann:

A_n positiv definit $\Leftrightarrow \det A_k > 0$ für $k = 1, \dots, n$. (Fischer, S. 327) (*)

Behauptung: $\det A_k = k + 1 \forall k \in \{1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ beliebig.

Beweis:

1. Induktionsanfang: $k = 1: A_1 = (2) \Rightarrow \det A_1 = 2 = 1 + 1$
2. (a) Induktionsannahme: Für $k \geq 1$ gelte: $\det A_k = k + 1 \Leftrightarrow$ für $k \geq 0$ gelte: $\det A_{k-1} = k + 2$.
- (b) Induktionsbehauptung: Dann gilt für $k + 1: \det A_{k+1} = k + 2$
- (c) Induktionsbegründung:

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M((k+1) \times (k+1), \mathbb{R})$$

Berechnung von $\det A_{k+1}$ durch Entwicklung nach der $(k+1)$ -ten Zeile:

$$\det A_{k+1} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & A_{k-1} & & \vdots \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \det A_k \text{ nach der } k\text{-ten Spalte entwickeln}$$

$$\Leftrightarrow A_{k+1} = (+1) \cdot (-1) \cdot \det A_{k-1} + 2 \cdot \det A_k$$

$$\Leftrightarrow A_{k+1} = 2 \cdot \det A_k - \det A_{k-1}$$

$$\stackrel{(2a)}{=} 2 \cdot (k + 1) - k$$

$$= 2 \cdot k + 2 - k$$

$$= k + 2$$

Wegen $\det A_k = k + 1$ ist $\det A_k > 0$ für $k = 1, \dots, n$

$\stackrel{*}{\Rightarrow}$ Alle Matrizen A_n sind positiv definit.

□