

Mathematik für Informatiker II - Übungsblatt 11
Übungsgruppe 1 - Mo, 14-16 Uhr
Janko Böhm

Jan Hendrik Dithmar - Matrikelnummer 2031259

Aufgabe 1

Es ergibt sich folgende Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Satz aus Vorlesung: Sei $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert einer Matrix $A \in M(k \times k, \mathbb{K})$ mit $|\lambda| = 1$ (ohne Vielfachheit). Sei ferner

$$\text{Eig}(A, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix} \right\rangle$$

mit $z_i \geq 0 \forall i$ und $\sum_{i=1}^k z_i = 1$. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_k & \dots & z_k \end{pmatrix} \in M(k \times k, \mathbb{K})$$

Die Eigenwerte der Matrix A sind (Berechnung mit Maple)

$$0, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{5}{12}$$

Die Voraussetzung für den Satz ist somit erfüllt und der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ existiert. Ein zum Eigenwert $\lambda = 1$ gehörender Eigenvektor ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nach „Normierung“ auf $\sum_{i=1}^k z_i = 1$ ergibt sich der Vektor

$$\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Aus dem Satz folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \cdots & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \cdots & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & \cdots & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \cdots & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \cdots & \frac{3}{14} \\ \frac{1}{7} & \cdots & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \in M(6 \times 6, \mathbb{R})$$

Aufgabe 3

Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass eine intakte Maschine ausfällt, und $q = 1 - p$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine intakte Maschine nicht ausfällt. Eine defekte Maschine ist mit der Wahrscheinlichkeit 1 am nächsten Tag wieder intakt. Es ergibt sich folgende Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} q^5 & q^4 & q^3 & q^2 & q & 1 \\ 5q^4p & 4q^3p & 3q^2p & 2qp & p & 0 \\ 10q^3p^2 & 6q^2p^2 & 3qp^2 & p^2 & 0 & 0 \\ 10q^2p^3 & 4qp^3 & p^3 & 0 & 0 & 0 \\ 5qp^4 & p^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei i die Anzahl der Maschinen, die an einem bestimmten Tag defekt sind. Möchte man wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit am nächsten Tag genau j Maschinen defekt sind, liest man die Wahrscheinlichkeit in der $(i-1)$ -ten Spalte der $(j-1)$ -ten Zeile ab.

Die Eigenwerte der Matrix A sind (Berechnung mit Maple)

$$1, -p, p^2, -p^3, p^4, -p^5$$

Somit ist die Voraussetzung für den in Aufgabe 1 zitierten Satz genau dann erfüllt, wenn $p \neq 1$. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$. Ein zum Eigenwert $\lambda = 1$ gehörender Eigenvektor ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5p \\ 10p^2 \\ 10p^3 \\ 5p^4 \\ p^5 \end{pmatrix}$$

Da

$$1 + 5p + 10p^2 + 10p^3 + 5p^4 + p^5 = (p+1)^5$$

ergibt sich nach „Normierung“ auf $\sum_{i=1}^k z_i = 1$ der Vektor

$$\frac{1}{(p+1)^5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5p \\ 10p^2 \\ 10p^3 \\ 5p^4 \\ p^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(p+1)^5} \\ \frac{5p}{(p+1)^5} \\ \frac{10p^2}{(p+1)^5} \\ \frac{10p^3}{(p+1)^5} \\ \frac{5p^4}{(p+1)^5} \\ \frac{p^5}{(p+1)^5} \end{pmatrix}$$

Aus dem Satz folgt für $p \neq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{(p+1)^5} & \cdots & \frac{1}{(p+1)^5} \\ \frac{5p}{(p+1)^5} & \cdots & \frac{5p}{(p+1)^5} \\ \frac{10p^2}{(p+1)^5} & \cdots & \frac{10p^2}{(p+1)^5} \\ \frac{10p^3}{(p+1)^5} & \cdots & \frac{10p^3}{(p+1)^5} \\ \frac{5p^4}{(p+1)^5} & \cdots & \frac{5p^4}{(p+1)^5} \\ \frac{p^5}{(p+1)^5} & \cdots & \frac{p^5}{(p+1)^5} \end{pmatrix} \in M(6 \times 6, \mathbb{R})$$

Aufgabe 4

χ^2 -Verteilungstest (= χ^2 -Anpassungstest) für

$$X = \begin{cases} 1 & \text{für } Z \in [-1; -\frac{1}{2}[\\ 2 & \text{für } Z \in [-\frac{1}{2}; 0[\\ 3 & \text{für } Z \in [0; \frac{1}{2}[\\ 4 & \text{für } Z \in [\frac{1}{2}; 1[\end{cases}$$

Länge der Versuchsreihe $n = 50$.

Annahme: Hypothese H_0

$$\begin{aligned}P(X = 1) &= \frac{1}{8} =: p_1 \\P(X = 2) &= \frac{3}{8} =: p_2 \\P(X = 3) &= \frac{3}{8} =: p_3 \\P(X = 4) &= \frac{1}{8} =: p_4\end{aligned}$$

ist wahr.

$$\begin{aligned}n \cdot p_1 &= 50 \cdot \frac{1}{8} = 6,25 \\n \cdot p_2 &= 50 \cdot \frac{3}{8} = 18,75 \\n \cdot p_3 &= 50 \cdot \frac{3}{8} = 18,75 \\n \cdot p_4 &= 50 \cdot \frac{1}{8} = 6,25\end{aligned}$$

$\Rightarrow n \cdot p_i \geq 5$ ist für $i = 1, 2, 3, 4$ erfüllt.

$\Rightarrow Y$ ist $\chi_{k-1}^2 = \chi_3^2$ -verteilt.

Sei $a_i = \#(\{X = i\}) \Rightarrow a_1 = 7; \quad a_2 = 17; \quad a_3 = 19; \quad a_4 = 7.$

Das Maß für die Abweichung ist die Testgröße Y mit

$$\begin{aligned}Y &= \sum_{i=1}^4 \frac{(a_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \\&= \frac{9}{100} + \frac{49}{300} + \frac{4}{300} + \frac{9}{100} \\&= \frac{27 + 49 + 4 + 27}{300} \\&= \frac{107}{300} \\&= 0,35\bar{6}\end{aligned}$$

H_0 wird abgelehnt, wenn $Y > c$ ist. Laut Maple ist $c = 0,3518463177$ für χ_3^2 und $\alpha = 0,05$. Wegen $Y = 0,35\bar{6} > c$ wird H_0 bei der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$ verworfen.

Dichte von Z: Z ist $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt. $\Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Aufgabe 5

Berechne $\bar{X}$:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} X_i = 2,1010$$

Testgröße Z :

$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (X_i - 2,1010)^2}{0,5^2} \\
 &= \frac{4}{9} \cdot \left[0,429^2 + 1,211^2 + 0,381^2 + 0,371^2 + 0,559^2 \right. \\
 &\quad \left. + 0,199^2 + 0,349^2 + 0,211^2 + 0,389^2 + 0,249^2 \right] \\
 &= \frac{4}{9} \cdot 2,665090 \\
 &= 1,1844844
 \end{aligned}$$

H_0 wird mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α abgelehnt, falls $Z > c$ ist. Dabei ist c das α -Fraktil der χ_{n-1}^2 -Verteilung.

Für $\chi_{n-1}^2 = \chi_9^2$ und $\alpha = 0,01$ ergibt sich (vgl. Maple):

$$c = 2,087900736$$

Wegen $Z < c$ wird H_0 nicht abgelehnt, also angenommen.