

Mathematik für Informatiker II - Übungsblatt 10
Übungsgruppe 1 - Mo, 14-16 Uhr
Janko Böhm

Jan Hendrik Dithmar - Matrikelnummer 2031259

Aufgabe 1

Stichprobe: $[0, 62; 1, 19; 1, 35; 1, 06; 0, 61; 0, 58; 0, 87; 0, 88; 0, 88; 0, 72]$

n=10:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} X_i \\ \bar{X} &= 0,876\end{aligned}$$

Setze $U = \bar{X} - \frac{c \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ und $W = \bar{X} + \frac{c \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ mit $\sigma = 0,3$ (gegeben) und mit $c = 1,960$ für $\gamma = 0,95$ gemäß $c(\gamma)$ -Tabelle (vgl. Vorlesung).

$$\begin{aligned}\Rightarrow U &= 0,876 - \frac{1,960 \cdot 0,3}{\sqrt{10}} = 0,6901 \\ W &= 0,876 + \frac{1,960 \cdot 0,3}{\sqrt{10}} = 1,0619\end{aligned}$$

Ergebnis: Ein **Konfidenzintervall** zum Niveau 95% für den Erwartungswert μ ist das Intervall

$$(U, W) = (0,6901; 1,0619),$$

d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit $\gamma = 0,95$ ist der Erwartungswert $\mu \in (0,6901; 1,0619)$.

Aufgabe 2

Gesucht: ein Konfidenzintervall zum Niveau 95% für den Erwartungswert μ einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariablen bei unbekannter Varianz σ^2 .

Lösung: Stichprobe wie in Aufgabe 1 $\Rightarrow \bar{X} = 0,876$; Berechne

$$S = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

n=10:

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{10} (X_i - 0,876)^2 \\ S &= \frac{1}{9} \cdot 0,605440 \\ S &= 0,067271 \\ \Rightarrow \sqrt{S} &= 0,25936675 \\ \sqrt{S} &= 0,25937\end{aligned}$$

Für $\gamma = 0,95$ und für t ergibt sich aus den tabellierten Werten der t -Verteilung:

$$c = 2,262.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow U &= \bar{X} - \frac{c \cdot \sqrt{S}}{\sqrt{n}} = 0,876 - \frac{2,262 \cdot 0,25937}{\sqrt{10}} = 0,6905 \\ W &= \bar{X} + \frac{c \cdot \sqrt{S}}{\sqrt{n}} = 0,876 + \frac{2,262 \cdot 0,25937}{\sqrt{10}} = 1,0615\end{aligned}$$

Ergebnis: Konfidenzintervall (U, W) für μ zum Niveau 95% bei unbekannter Varianz:

$$(U, W) = (0,6905; 1,0615)$$

Anmerkung: Diese Werte sind der Tabelle im Anhang entnommen (Quelle: Hans Bartel: Statistik II, 2. Auflage, UTB). Werte aus dieser Tabelle tauchen auch in der Vorlesung auf. Nimmt man jedoch die Tabelle für die t -Verteilung von der Homepage, so muss $c = 1,833$ sein. Für $\gamma = 0,95$ und für t ergibt sich aus den tabellierten Werten der t -Verteilung:

$$c = 1,833.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow U &= \bar{X} - \frac{c \cdot \sqrt{S}}{\sqrt{n}} = 0,876 - \frac{1,833 \cdot 0,25937}{\sqrt{10}} = 0,7257 \\ W &= \bar{X} + \frac{c \cdot \sqrt{S}}{\sqrt{n}} = 0,876 + \frac{1,833 \cdot 0,25937}{\sqrt{10}} = 1,0263\end{aligned}$$

Ergebnis: Konfidenzintervall (U, W) für μ zum Niveau 95% bei unbekannter Varianz:

$$(U, W) = (0,7257; 1,0263)$$

(Ich bin leider etwas verwirrt, welche Tabelle man nun nehmen soll. Es wäre außerdem hilfreicher gewesen, eine richtige Tabelle auf der Homepage zur Verfügung zu stellen. Die Grafiken sind auf Grund der Bildqualität etwas schwer abzulesen.)

Aufgabe 3

X sei Poisson-verteilt mit Parameter λ , d.h. die W-Verteilung von X lautet:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(a) Berechnung von $E(X)$:

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \\
 &= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
 &= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!} \\
 &= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} \\
 &= \lambda
 \end{aligned}$$

Also: $E(X) = \lambda$. Es gilt:

$$(\alpha) \quad \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \cdot e^{\lambda}$$

(b) Berechnung von $E(X^2)$ und $Var(X)$:

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \\
 &= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
 &= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right] \\
 &= e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \left[\sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa \cdot \frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!} + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!} \right] \\
 &\stackrel{(\alpha)}{=} e^{-\lambda} \cdot \lambda \left[\lambda \cdot e^{\lambda} + e^{\lambda} \right] \\
 &= \lambda^2 + \lambda
 \end{aligned}$$

Also: $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda \Rightarrow Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Also: $Var(X) = \lambda$. Es gilt:

$$(\beta) \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = (\lambda^2 + \lambda) \cdot e^{\lambda}$$

(c) Das k -te Moment m_k der Zufallsgröße X ist definiert als $m_k = E(X^k)$.

Für $k=1$: $m_1 = E(X) = \lambda$ nach Teil (a)

Für k=2: $m_2 = E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$ nach Teil (b)

(1) Berechnung von $m_3 = E(X^3)$:

$$m_3 = \sum_{k=0}^{\infty} k^3 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$\Leftrightarrow e^{\lambda} \cdot m_3 = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\text{Zwischenrechnung: } k^2 = ((k-1) + 1)^2 = (k-1)^2 + 2 \cdot (k-1) + 1$$

$$\begin{aligned} e^{\lambda} \cdot m_3 &= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} ((k-1)^2 + 2 \cdot (k-1) + 1) \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^2 \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right] \\ &= \lambda \cdot \left[\sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa^2 \cdot \frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!} + 2 \cdot \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa \cdot \frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!} + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\kappa}}{\kappa!} \right] \\ &\stackrel{(\alpha), (\beta)}{=} \lambda \cdot [(\lambda^2 + \lambda) \cdot e^{\lambda} + 2\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}] \\ e^{\lambda} \cdot m_3 &= e^{\lambda} \cdot [\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda^2 + \lambda] = e^{\lambda} (\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda) \\ \Leftrightarrow m_3 &= \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

Es gilt:

$$(\gamma) \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^3 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = (\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda) \cdot e^{\lambda}$$

(2) Berechnung von $m_4 = E(X^4)$:

$$\begin{aligned} e^\lambda \cdot m_4 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^4 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

$$\text{Zwischenrechnung: } k^3 = ((k-1) + 1)^3 = (k-1)^3 + 3(k-1)^2 + 3(k-1) + 1$$

$$\begin{aligned} e^\lambda \cdot m_4 &= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1)^3 + 3(k-1)^2 + 3(k-1) + 1] \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^3 \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + 3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^2 \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right. \\ &\quad \left. + 3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right] \\ &= \lambda \cdot \left[\sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa^3 \cdot \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} + 3 \cdot \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa^2 \cdot \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} + 3 \cdot \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa \cdot \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} \right] \\ &\stackrel{(\alpha), (\beta), (\gamma)}{=} \lambda \cdot \left[(\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda) \cdot e^\lambda + 3(\lambda^2 + \lambda) \cdot e^\lambda + 3\lambda \cdot e^\lambda + e^\lambda \right] \\ &= e^\lambda \cdot (\lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2 + 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda^2 + \lambda) \\ e^\lambda \cdot m_4 &= e^\lambda \cdot (\lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda) \\ \Leftrightarrow m_4 &= \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

Es gilt:

$$(\delta) \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^4 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = (\lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda) \cdot e^\lambda$$

(3) Berechnung von $m_5 = E(X^5)$:

$$\begin{aligned} e^\lambda \cdot m_5 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^5 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^4 \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zwischenrechnung: } k^4 &= ((k-1) + 1)^4 \\ &= (k-1)^4 + 4(k-1)^3 + 6(k-1)^2 + 4(k-1) + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^\lambda \cdot m_5 &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k-1)^4 + 4(k-1)^3 + 6(k-1)^2 + 4(k-1) + 1 \right] \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^4 \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^3 \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right. \\ &\quad + 6 \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^2 \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right] \\ &= \lambda \left[\sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa^4 \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} + 4 \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa^3 \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} + 6 \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa^2 \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{\kappa=0}^{\infty} \kappa \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} \right] \\ &\stackrel{(\alpha),(\beta),(\gamma),(\delta)}{=} \lambda \left[(\lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda) \cdot e^\lambda + 4(\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda) \cdot e^\lambda \right. \\ &\quad \left. + 6(\lambda^2 + \lambda) \cdot e^\lambda + 4\lambda \cdot e^\lambda + e^\lambda \right] \\ &= e^\lambda \left[\lambda^5 + 6\lambda^4 + 7\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda^4 + 12\lambda^3 \right. \\ &\quad \left. + 4\lambda^2 + 6\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda^2 + \lambda \right] \\ e^\lambda \cdot m_5 &= e^\lambda [\lambda^5 + 10\lambda^4 + 25\lambda^3 + 15\lambda^2 + \lambda] \\ \Leftrightarrow m_5 &= \lambda^5 + 10\lambda^4 + 25\lambda^3 + 15\lambda^2 + \lambda \end{aligned}$$

Formel für das k -te Moment m_k :

$$m_0 = 1$$

und

$$m_k = \lambda \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \cdot m_j, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(Hierbei ist $m_0 = E(X^0) = E(1) = 1$, also $m_0 = 1$.)

Aufgabe 4

Zu zeigen:

$$E(N) = \sum_{i=1}^{\infty} P(N \geq i)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} E(N) &\stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(N \geq i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=i}^{\infty} P(N = j) \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} P(N = j) \right) + \left(\sum_{j=2}^{\infty} P(N = j) \right) + \left(\sum_{j=3}^{\infty} P(N = j) \right) + \dots \\ &= 1 \cdot P(N = 1) + 2 \cdot P(N = 2) + 3 \cdot P(N = 3) + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot P(N = i) \\ &= E(N) \end{aligned}$$

□