

Übungsblatt 1

Jan Hendrik Dithmar

Aufgabe 2

$$\alpha = (2, 3, 5, 4) ; \beta = (1, 5, 3, 6, 2, 4)$$

$$\alpha^2 = (2, 3, 5, 4) \cdot (2, 3, 5, 4) = (1)(2, 5)(3, 4)(6) = (2, 5)(3, 4)$$

$$\alpha^4 = \alpha^2 \cdot \alpha^2 = (2, 5)(3, 4) \cdot (2, 5)(3, 4) = (1)(2)(3)(4)(5)(6) = (1) \text{ (id. Abb.)}$$

$$\beta^2 = (1, 5, 3, 6, 2, 4) \cdot (1, 5, 3, 6, 2, 4) = (1, 3, 2)(4, 5, 6)$$

$$\beta^4 = \beta^2 \cdot \beta^2 = (1, 3, 2)(4, 5, 6) \cdot (1, 3, 2)(4, 5, 6) = (1, 2, 3)(4, 6, 5)$$

$$\beta^6 = \beta^2 \cdot \beta^4 = (1, 3, 2)(4, 5, 6) \cdot (1, 2, 3)(4, 6, 5) = (1)(2)(3)(4)(5)(6) = (1)$$

$$\alpha\beta = (2, 3, 5, 4) \cdot (1, 5, 3, 6, 2, 4) = (1, 4)(2)(3, 6)(5) = (1, 4)(3, 6)$$

$$(\alpha\beta)^2 = (1, 4)(3, 6) \cdot (1, 4)(3, 6) = (1)(2)(3)(4)(5)(6) = (1)$$

$$\alpha = (2, 3, 5, 4) \Rightarrow \alpha^{-1} = (4, 5, 3, 2)$$

$$\alpha^{-1}\beta^2 = (4, 5, 3, 2) \cdot (1, 3, 2)(4, 5, 6) = (1, 2)(3, 4)(5, 6)$$

$$(\alpha^{-1}\beta^2)^2 = (1, 2)(3, 4)(5, 6) \cdot (1, 2)(3, 4)(5, 6) = (1)(2)(3)(4)(5)(6) = (1)$$

Aufgabe 3

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \det(A - t \cdot E_3) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 2 \\ 2 & 1-t & 2 \\ 2 & 2 & 1-t \end{pmatrix} \\ &= (1-t)^3 + 8 - 8 - 4 \cdot (1-t) - 4 \cdot (1-t) - 4 \cdot (1-t) \\ &= (1-t)^3 + 16 - 12 \cdot (1-t) \\ &= 1 - 3t + 3t^2 - t^3 + 16 - 12 + 12t \\ &= -t^3 + 3t^2 + 9t + 5 = (-1) \cdot (t^3 - 3t^2 - 9t - 5) \\ &= (-1) \cdot (t-5) \cdot (t+1)^2 = (-1) \cdot (t+1)^2 \cdot (t-5) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind: $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 5$.

$Eig(A, -1) = \ker(A + E_3)$:

$$A + E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(A + E_3) = 1 \Rightarrow \dim \ker(A + E_3) = 2$$

Also ist $\mu(\chi_A, -1) = 2 = \dim Eig(A, -1)$

(*)

Es gilt: $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis von $Eig(A, -1)$.

$Eig(A, 5) = \ker(A - 5E_3) :$

$$A - 5E_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg(A - 5E_3) = 2 \Rightarrow \dim \ker(A - 5E_3) = 1 \Leftrightarrow \dim Eig(A, 5) = 1$$

Also ist $\mu(\chi_A, 5) = 1 = \dim Eig(A, 5)$ (**)

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis von $Eig(A, 5)$.

Aus (*) und (**) folgt, dass die Matrix A diagonalisierbar ist.

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$, die ausschließlich aus Eigenvektoren von A besteht.

Eine Transformationsmatrix T für die Diagonalform lautet:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\chi_B(t) &= \det(B - tE_3) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ 2 & 2-t & 1 \\ -2 & 1 & 2-t \end{pmatrix} \\
&= (2-t)^3 - 2 + 2 + 2 \cdot (2-t) - 1 \cdot (2-t) - 2 \cdot (2-t) \\
&= (2-t)^3 - 1 \cdot (2-t) = (2-t) \cdot [(2-t)^2 - 1] \\
&= (2-t) \cdot (t^2 - 4t + 3) = -(t-2) \cdot (t-1) \cdot (t-3) \\
&= -(t-1) \cdot (t-2) \cdot (t-3)
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von B sind: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$.
Da sie paarweise verschieden sind, ist B diagonalisierbar.

Die Diagonalmatrix lautet: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$Eig(B, 1) = \ker(B - E_3)$:

$$B - E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(B - E_3) = 2 \Rightarrow \dim \ker(B - E_3) = 1 \Leftrightarrow \dim Eig(B, 1) = 1 = \mu(\chi_B, 1)$
 $\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis von $Eig(B, 1)$.

$Eig(B, 2) = \ker(B - 2 \cdot E_3)$:

$$B - 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(B - 2E_3) = 2 \Rightarrow \dim \ker(B - 2E_3) = 1 \Leftrightarrow \dim Eig(B, 2) = 1 = \mu(\chi_B, 2)$.
 $\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis von $Eig(B, 2)$.

$Eig(B, 3) = \ker(B - 3E_3)$:

$$B - 3E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow rg(B - 3E_3) = 2 \Rightarrow \dim \ker(B - 3E_3) = 1 \Leftrightarrow \dim Eig(B, 3) = 1 = \mu(\chi_B, 3)$
 $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis von $Eig(B, 3)$.

Somit ist $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis der $\mathbb{R}^3$, die ausschließlich aus Eigenvektoren von B besteht.

Eine Transformationsmatrix T für die Diagonalform lautet:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -6 & -2 & -1 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \chi_C(t) &= \det(C - t \cdot E_3) = \det \begin{pmatrix} 6-t & 3 & 1 \\ -6 & -2-t & -1 \\ 6 & 4 & 3-t \end{pmatrix} \\ &= (6-t)(-2-t)(3-t) - 18 - 24 + 6 \cdot (2+t) + 4 \cdot (6-t) + 18 \cdot (3-t) \\ &= -t^3 + 7t^2 - 36 - 42 + 12 + 6t + 24 - 4t + 54 - 18t \\ &= -t^3 + 7t^2 - 16t + 12 = (-1) \cdot (t^3 - 7t^2 + 16t - 12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_1 = 2 &\Rightarrow (t^3 - 7t^2 + 16t - 12) : (t-2) = t^2 - 5t + 6 = (t-2) \cdot (t-3) \\ &\Rightarrow \chi_C(t) = (-1) \cdot (t-2)^2 \cdot (t-3) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von C sind: $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$.

$Eig(C, 2) = \ker(C - 2E_3)$:

$$C - 2E_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -6 & -4 & -1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(C - 2E_3) = 2 \Rightarrow \dim \ker(C - 2E_3) = 1 \Leftrightarrow \dim Eig(C, 2) = 1 < 2 = \mu(\chi_C, 2).$$

$\Rightarrow$ die Matrix C ist nicht diagonalisierbar.

$$(C - 2E_3)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -6 & -4 & -1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -6 & -4 & -1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -6 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(C - 2E_3)^2 = 1.$$

$$(C - 2E_3)^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -6 & -4 & -1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -6 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -6 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (C - 2E_3)^2$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(C - 2E_3)^3 = 1.$$

Bestimmung der Jordanschen Normalform von C :

Bezeichnung:

$l_i(\lambda_\varrho) = \text{Anzahl der } i\text{-reihigen Jordanblöcke } J_i(\lambda_\varrho) \text{ zum Eigenwert } \lambda_\varrho \text{ in } C.$

Es gilt:

$$l_i(\lambda_\varrho) = \operatorname{rg}((C - \lambda_\varrho \cdot E)^{i+1}) + \operatorname{rg}((C - \lambda_\varrho \cdot E)^{i-1}) - 2 \cdot \operatorname{rg}((C - \lambda_\varrho \cdot E)^i).$$

$$\begin{aligned} l_1(2) &= \operatorname{rg}((C - 2E)^2) + \operatorname{rg}((C - 2E)^0) - 2 \cdot \operatorname{rg}((C - 2E)^1) \\ &= 1 + 3 - 2 \cdot 2 = 0 \end{aligned}$$

d.h. es gibt keinen 1-reihigen Jordanblock zu $\lambda_1 = 2$.

$$\begin{aligned} l_2(2) &= \operatorname{rg}((C - 2E)^3) + \operatorname{rg}((C - 2E)^1) - 2 \cdot \operatorname{rg}((C - 2E)^2) \\ &= 1 + 2 - 2 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

d.h. es gibt einen 2-reihigen Jordanblock zu $\lambda_1 = 2$.

$\operatorname{Eig}(C, 3) = \ker(C - 3E_3)$:

$$C - 3E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -6 & -5 & -1 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(C - 3E_3) = 2$$

$$(C - 3E_3)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -6 & -5 & -1 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -6 & -5 & -1 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(C - 3E_3)^2 = 2$$

$$\begin{aligned} l_1(3) &= \operatorname{rg}((C - 3E)^2) + \operatorname{rg}((C - 3E)^0) - 2 \cdot \operatorname{rg}((C - 3E)^1) \\ &= 2 + 3 - 2 \cdot 2 = 1 \end{aligned}$$

d.h. es gibt einen 1-reihigen Jordanblock zu $\lambda_2 = 3$.

Die Jordansche Normalform C^* der Matrix C lautet:

$$C^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

(a)

T ist ein $\mathbb{C}$ -VR.

Definiere: $\oplus : T \times T \rightarrow T$, $((b_n), (b'_n)) \mapsto (b_n) \oplus (b'_n)$ mit $(b_n) \oplus (b'_n) \stackrel{Def.}{=} (b_n + b'_n)$

1. Seien

$$\begin{aligned} (b_n), (b'_n) \in T &\Rightarrow b_{n+2} = b_{n+1} + b_n, \quad \forall n \geq 0 \\ &\wedge \quad b'_{n+2} = b'_{n+1} + b'_n, \quad b_n \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b_n) \oplus (b'_n) &\stackrel{Def.}{=} (b_n + b'_n) =: (b''_n) \in T, \text{ denn:} \\ b''_{n+2} &= b_{n+2} + b'_{n+2} = (b_{n+1} + b_n) + (b'_{n+1} + b'_n) \\ &= (b_{n+1} + b'_{n+1}) + (b_n + b'_n) \\ &= b''_{n+1} + b''_n \text{ d.h. } T \text{ ist bezügl. } \oplus \text{ abgeschlossen.} \end{aligned}$$

2. Kommutativ- u. Assoziativgesetz gelten in T bezügl. $\oplus$, da sie in $(\mathbb{C}, +)$ gelten.

3. $(0)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 0, 0, \dots) \in T$ ist das neutrale Element in $(T, \oplus)$.

4. Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$ beliebig

Bilde $(\bar{b}_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$, denn:

$$\begin{aligned} \bar{b}_{n+2} &= -b_{n+2} = -(b_{n+1} + b_n) = -b_{n+1} + (-b_n) = b_{n+1} + b_n \Rightarrow (b_n) \oplus (\bar{b}_n) = \\ &= (b_n + \bar{b}_n) = (b_n + (-b_n)) = (0) \end{aligned}$$

Also gibt es zu jedem $(b_n) \in T$ ein Inverses, nämlich $(-b_n) \in T$.

Insgesamt: $(T, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe.

Definiere: $\odot : \mathbb{C} \times T \rightarrow T$, $(c, (b_n)) \mapsto c \odot (b_n)$ mit $c \odot (b_n) \stackrel{Def.}{=} (cb_n)$.

Man muss zeigen:

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \forall (b_n) \in T, \forall c \in \mathbb{C}, \forall (b_n)(b'_n) \in T$.

- (1) $(c_1 + c_2) \odot (b_n) = c_1 \odot (b_n) \oplus c_2 \odot (b_n)$
- (2) $c \odot ((b_n) \oplus (b'_n)) = c \odot (b_n) \oplus c \odot (b'_n)$
- (3) $c_1 \odot (c_2 \odot (b_n)) = (c_1 \cdot c_2) \odot (b_n)$
- (4) $1 \odot (b_n) = (b_n)$

Beweis zu (1): Seien $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $(b_n) \in T$ beliebig.

$$\begin{aligned}(c_1 + c_2) \odot (b_n) &= ((c_1 + c_2) \cdot b_n) = (c_1 \cdot b_n + c_2 \cdot b_n) \\ &= (c_1 \cdot b_n) \oplus (c_2 \cdot b_n) \\ &= c_1 \odot (b_n) \oplus c_2 \odot (b_n)\end{aligned}$$

Beweis zu (2): Seien $c \in \mathbb{C}$, $(b_n), (b'_n) \in T$ beliebig.

$$\begin{aligned}c \odot ((b_n) \oplus (b'_n)) &= c \odot ((b_n + b'_n)) = (c \cdot (b_n + b'_n)) \\ &= (c \cdot b_n + c \cdot b'_n) = (c \cdot b_n) \oplus (c \cdot b'_n) \\ &= c \odot (b_n) \oplus c \odot (b'_n)\end{aligned}$$

Beweis zu (3): Seien $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $(b_n) \in T$ beliebig.

$$\begin{aligned}c_1 \odot (c_2 \odot (b_n)) &= c_1 \odot ((c_2 \cdot b_n)) \\ &= (c_1 \cdot (c_2 \cdot b_n)) \\ &= ((c_1 \cdot c_2) \cdot b_n) \\ &= (c_1 \cdot c_2) \odot (b_n)\end{aligned}$$

Beweis zu (4): Sei $(b_n) \in T$ beliebig.

$$1 \odot (b_n) = (1 \cdot b_n) = (b_n)$$

Insgesamt: $(T, \oplus, \odot)$ ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

Fibonacci-Zahlen:

$$\begin{aligned}\beta_{n+2} &= \beta_{n+1} + \beta_n, \quad n \geq 0, \quad \beta_n \in \mathbb{C} \\ \Leftrightarrow \beta_{n+1} &= \beta_n + \beta_{n-1}, \quad n \geq 1\end{aligned}$$

Seien $\beta_0 = 1$; $\beta_1 = 0$

$\Rightarrow \beta_2 = 1, \beta_3 = 1, \beta_4 = 2, \beta_5 = 3, \beta_6 = 5, \beta_7 = 8, \dots, \beta_n, \dots$

Seien $\beta'_0 = 0$; $\beta'_1 = 1$

$\Rightarrow \beta'_2 = 1, \beta'_3 = 2, \beta'_4 = 3, \beta'_5 = 5, \beta'_6 = 8, \beta'_7 = 13, \dots, \beta'_{n'}, \dots$

Betrachte $\mathcal{B} = \{(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta'_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}\} \subset T$

Behauptung: $\mathcal{B}$ ist eine Basis des $\mathbb{C}$ -Vektorraums T .

Begründung: Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$ beliebig vorgegeben. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$: $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$.

Beh.: $b_n = b_0 \cdot \beta_n + b_1 \cdot \beta'_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (i)

Beweis durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang:

$n = 0$:

$$\begin{aligned} b_0 &= b_0 \cdot \beta_0 + b_1 \cdot \beta'_0 \\ b_0 &= b_0 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 \quad (\text{ok}) \end{aligned}$$

$n = 1$:

$$\begin{aligned} b_1 &= b_0 \cdot \beta_1 + b_1 \cdot \beta'_1 \\ b_1 &= b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 \quad (\text{ok}) \end{aligned}$$

2. (a) Induktionsannahme: Es gelte:

$$\begin{aligned} b_n &= b_0 \cdot \beta_n + b_1 \cdot \beta'_n, \quad n \geq 0 \\ \Leftrightarrow b_{n-1} &= b_0 \cdot \beta_{n-1} + b_1 \cdot \beta'_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

(b) Induktionsbehauptung: Dann ist auch $\beta_{n+1} = \beta_0 \cdot \beta_{n+1} + b_1 \cdot \beta'_{n+1}$

(c) Induktionsbegründung: Es gilt

$$\begin{aligned} \beta_{n+2} &= \beta_{n+1} + \beta_n \quad \forall n \geq 0 \\ \Leftrightarrow \beta_{n+1} &= \beta_n + \beta_{n-1} \quad \forall n \geq 1 \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

ebenso: $\beta'_{n+1} = \beta'_n + \beta'_{n-1} \quad \forall n \geq 1 \quad (\text{II})$

sowie: $b_{n+1} = b_n + b_{n-1} \quad \forall n \geq 1 \quad (\text{III})$

Betrachte:

$$\begin{aligned} b_0 \cdot \beta_{n+1} + b_1 \cdot \beta'_{n-1} &\stackrel{(I),(II)}{=} b_0 \cdot (\beta_n + \beta_{n-1}) + b_1 \cdot (\beta'_n + \beta'_{n-1}) \\ &= (b_0 \cdot \beta_n + b_1 \cdot \beta'_n) + (b_0 \cdot \beta_{n-1} + b_1 \cdot \beta'_{n-1}) \\ &\stackrel{(2a)}{=} b_n + b_{n-1} \\ &\stackrel{(III)}{=} b_{n+1} \end{aligned}$$

Somit lässt sich jede Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$ als Linearkombination der Basisselemente $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\beta'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gemäß $(b_n) = b_0 \cdot (\beta_n) + b_1 \cdot (\beta'_n)$ darstellen. Da diese Darstellung zudem eindeutig ist, ist $\mathcal{B} = \{(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta'_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ eine Basis von T . (ii)

Somit ist $\dim_{\mathbb{C}} T = 2$.

(b)

$$\begin{aligned} S : T \rightarrow T; (b_0, b_1, \dots) &\mapsto (b_1, b_2, \dots) \\ (b_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto (b_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Zeige: S ist ein Endomorphismus.

Beweis:

1. Seien $(b_n), (b'_n) \in T$ beliebig

$$\begin{aligned} S((b_n) \oplus (b'_n)) &= S((b_n + b'_n)) \\ &= S((b''_n)) \text{ mit } b''_n = b_n + b'_n \forall n \geq 0 \\ &= (b''_{n+1}) \\ &= (b_{n+1} + b'_{n+1}) \\ &= (b_{n+1}) \oplus (b'_{n+1}) \\ &= S((b_n)) \oplus S((b'_n)) \end{aligned}$$

2. Sei $c \in \mathbb{C}$ beliebig, sei $(b_n) \in T$ beliebig.

$$\begin{aligned} S(c \odot (b_n)) &= S((c \cdot b_n)) \\ &= (c \cdot b_{n+1}) \\ &= c \odot (b_{n+1}) = c \odot S((b_n)) \end{aligned}$$

Sei $\mathcal{B} = \{(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta'_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ die in Teil a) ausgezeichnete Basis von T .

Dann besitzt jedes Element $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$ bezüglich $\mathcal{B}$ die eindeutige Darstellung

$$(b_n) = b_0 \cdot (\beta_n) + b_1 \cdot (\beta'_n) = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Wegen $S((b_0, b_1, \dots)) = (b_1, b_2, \dots)$ lautet die Matrix $M_{\mathcal{B}}(S)$, die S bezügl. der Basis $\mathcal{B}$ von T darstellt:

$$M_{\mathcal{B}}(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt nämlich:

$$M_{\mathcal{B}}(S) \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 + b_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

(c)

Eigenwerte von S :

$$\det(S - t \cdot \text{id}_T) = \det(M_{\mathcal{B}}(S) - t \cdot E_2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = -t(1-t)-1 = -t+t^2-1 = t^2-t-1 \stackrel{!}{=} 0_{t_{1/2}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

Ergebnis: Die Eigenwerte von S (von $M_{\mathcal{B}}(S)$) sind:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{5}$$

und $\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{5}$

Die geschlossene Formel für die Glieder der Fibonacci-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lautet:

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{\text{sqrt}5} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Mit den Eigenwerten von $M_{\mathcal{B}}(S)$: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_n &= \lambda_1^n \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \lambda_2^n \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\lambda_1^n - \lambda_2^n) \end{aligned}$$

Diese Formel soll im Folgenden unter Verwendung der Eigenwerte von S (von $M_{\mathcal{B}}(S)$) bewiesen werden.

Dazu zunächst einige Vorbetrachtungen, die im Laufe der Rechnung Verwendung finden. Es gilt:

$$(\alpha) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Leftrightarrow \lambda_2 = 1 - \lambda_1$$

$$(\beta) \quad \lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}$$

$$(\gamma) \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

$$(\delta) \quad \text{Beh.: } \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } \lambda_i^n = \beta_n + \lambda_i \cdot \beta'_n, \quad (i = 1, 2) \quad (\beta_n, \beta'_n \text{ wie vorher definiert})$$

Beweis durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang:

$$n = 0:$$

$$\begin{aligned} \lambda_i^0 &= \beta_0 + \lambda_i \cdot \beta'_0 \\ 1 &= 1 + \lambda_i \cdot 0 \quad (\text{ok}) \end{aligned}$$

$$n = 1:$$

$$\begin{aligned} \lambda_i^1 &= \beta_1 + \lambda_i \cdot \beta'_1 \\ \lambda_i &= 0 + \lambda_i \cdot 1 \quad (\text{ok}) \end{aligned}$$

(a) Es gelte:

$$\begin{aligned} \lambda_i^n &= \beta_n + \lambda_i \cdot \beta'_n, \quad \forall n \geq 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_i^{n-1} &= \beta_{n-1} + \lambda_i \cdot \beta'_{n-1}, \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

(b) Dann gilt auch: $\lambda_i = \beta_{n+1} + \lambda_i \cdot \beta'_{n+1}, \forall n \geq 1$

(c) Induktionsbegründung:

$$\begin{aligned}
 \beta_{n+1} + \lambda_i \cdot \beta'_{n+1} &= (\beta_n + \beta_{n-1}) + \lambda_i \cdot (\beta'_n + \beta'_{n-1}) \\
 &= (\beta_n + \lambda_i \cdot \beta'_n) + (\beta_{n-1} + \lambda_i \cdot \beta'_{n-1}) \\
 &\stackrel{(2a)}{=} \lambda_i^n + \lambda_i^{n-1} \\
 &= \lambda_i^{n-1} \cdot (\lambda_i + 1) \\
 &\stackrel{(*)}{=} \lambda_i^{n-1} \cdot \lambda_i^2 = \lambda_i^{n+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (*) : \lambda_i^2 = \lambda_{1,2}^2 = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^2 &= \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{4} \\
 &= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} \\
 &= 1 + \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) \\
 &= 1 + \lambda_{1,2} \\
 &= \lambda_{1,2} + 1 = \lambda_i + 1
 \end{aligned}$$

(ε) Bestimme einen Vektor aus $Eig(M_{\mathcal{B}}(S), \lambda_1) = \ker(M_{\mathcal{B}}(S) - \lambda_1 \cdot E_2)$

$$M_{\mathcal{B}}(S) - \lambda_1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda_1 \end{pmatrix} \stackrel{(\alpha)}{=} \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_2 + 1 \end{pmatrix} \stackrel{(\gamma)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{mit } \mathcal{B} = \{(\beta_n), (\beta'_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ ist dennoch ein Eigenvektor zu λ_1 .

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = (l_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit } l_n = 1 \cdot \beta_n + \lambda_1 \cdot \beta'_n = \beta_n + \lambda_1 \cdot \beta'_n$$

Wegen (δ) ist $\beta_n + \lambda_1 \cdot \beta'_n = \lambda_1^n$ (ε_1)

Für den Eigenwert λ_2 führt man eine analoge Rechnung durch und erhält als Eigenvektor zu λ_2 :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = (l'_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{mit } l'_n = 1 \cdot \beta_n + \lambda_2 \cdot \beta'_n = \beta_n + \lambda_2 \cdot \beta'_n.$$

Wegen (δ) ist $\beta_n + \lambda_2 \cdot \beta'_n = \lambda_2^n$ (ε_2)

Auf (ε_1) und (ε_2) folgt:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1^n - \lambda_2^n &= (\beta_n + \lambda_1 \cdot \beta'_n) - (\beta_n + \lambda_2 \cdot \beta'_n) \\
 &= (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \beta'_n \\
 &\stackrel{(\beta)}{=} \sqrt{5} \cdot \beta'_n
 \end{aligned}$$

und somit: $\beta'_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\lambda_1^n - \lambda_2^n), \forall n \geq 0$ (φ)

Die Folge $(\beta'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist gemäß Festlegung aber gerade die Folge der Fibonaccizahlen. Somit ist $(\beta'_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und wegen (φ) ist $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\lambda_1^n - \lambda_2^n)$ bewiesen.

Aufgabe 5

$$A^2 = A \Leftrightarrow A^2 - A = 0 \Leftrightarrow A \cdot (A - E) = 0 \Leftrightarrow (A - 0 \cdot E) \cdot (A - 1 \cdot E) = 0$$

$$\Rightarrow \det((A - 0 \cdot E) \cdot (A - 1 \cdot E)) = \det 0$$

$$\det(A - 0 \cdot E) \cdot \det(A - 1 \cdot E) = 0 \Leftrightarrow \det(A - 0 \cdot E) = 0 \vee \det(A - 1 \cdot E) = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0$ ist Eigenwert von A oder $\lambda_2 = 1$ ist Eigenwert von A , d.h. die Eigenwerte von A sind in $\{0; 1\}$.

$$\Rightarrow \chi_A(t) = (-1)^n \cdot t^k \cdot (t - 1)^{n-k}, \quad 0 < k < n$$