

Image Processing and Computer Vision

Self-Test Problems

This problem sheet contains 6 problems which are intended to be similar in style and difficulty to a 180-minute written exam on IPCV.

Use these problems to test yourself. Opportunity to ask questions related to the problems of this test is given in the theoretical classroom exercise on

Tue, Feb. 19 / Wed, Feb. 20, 2008.

Problem 1 (Fourier and wavelet transform)

Let the signal $f = (7, 1, 2, 7, 1, 6, 8, 2)$ be given.

- (a) Compute the discrete Fourier transform of f . Eliminate from the transformed signal the coefficient which corresponds to the highest frequency, and perform the inverse transform.
- (b) Compute the discrete Haar wavelet transform of f . Eliminate the coefficient of smallest absolute value, and perform the inverse transform.

Aufgabe 1 (Fourier- und Wavelettransformation)

Gegeben sei das Signal $f = (7, 1, 2, 7, 1, 6, 8, 2)$.

- (a) Berechnen Sie die diskrete Fouriertransformation von f . Eliminieren Sie aus dem transformierten Signal den Koeffizienten, der der höchsten Frequenz entspricht, und führen Sie die Rücktransformation aus.
 - (b) Berechnen Sie die diskrete Haar-Wavelettransformation von f . Eliminieren Sie den betragskleinsten Koeffizienten und führen Sie die Rücktransformation aus.
-

Problem 2 (Histogram equalisation)

An image whose grey values are quantised by 3 bits has the following histogram:

Grey value	relative frequency
0	0.17
1	0.19
2	0.27
3	0.21
4	0.06
5	0.04
6	0.03
7	0.03

Perform a discrete histogram equalisation. State the correspondence between input and output grey values and the resulting histogram.

Aufgabe 2 (Histogrammegalisation)

Ein Bild, dessen Grauwerte mit 3 Bit quantisiert seien, habe folgendes Histogramm:

Grauwert	rel. Häufigkeit
0	0.17
1	0.19
2	0.27
3	0.21
4	0.06
5	0.04
6	0.03
7	0.03

Führen Sie eine diskrete Histogrammegalisation durch. Geben Sie die Zuordnung der Eingabe- und Ausgabegrauwerte sowie das resultierende Histogramm an.

Problem 3 (Motion analysis)

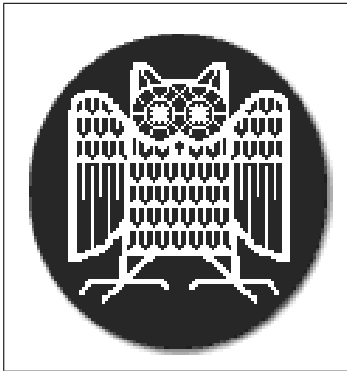
Let a sufficiently often continuously differentiable 1-D image sequence $f(x, z)$ be given, where $z \geq 0$ denotes time. The goal is to formulate a model for estimating the 1-D optical flow $u(x, z)$ which is based on the assumption that the *spatial gradient* of the grey value of objects remain constant over time.

- (a) Formulate the Optic Flow Constraint equation which results from this assumption.
- (b) Modify the Horn-Schunck energy functional in 1-D in such a way that the constancy of gradients is used as model assumption instead of constancy of grey values. State the modified energy functional.
- (c) Derive the differential equation which must necessarily be satisfied by a solution $u(x, z)$.
(Boundary conditions need *not* to be specified.)

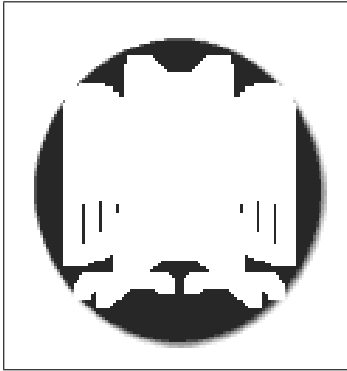
Aufgabe 3 (Bewegungsanalyse)

Gegeben sei eine hinreichend oft stetig differenzierbare 1D-Bildfolge $f(x, z)$, wobei $z \geq 0$ die Zeit bezeichnet. Ziel ist, ein Modell zur Schätzung des optischen Flusses $u(x, z)$ in 1D zu formulieren, das von der Annahme ausgeht, dass bei der Bewegung von Objektpunkten die *räumlichen Gradienten* der Grauwerte konstant bleiben.

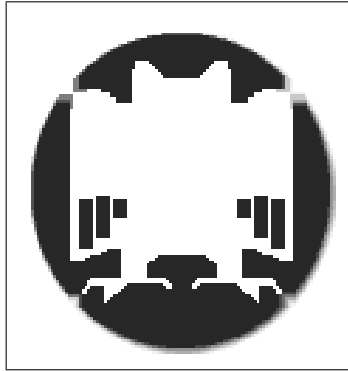
- (a) Formulieren Sie die aus dieser Annahme resultierende Bedingungsgleichung (Optic Flow Constraint).
 - (b) Modifizieren Sie das Horn-Schunck-Energiefunktional in 1D dergestalt, dass statt der Grauwertkonstanz die Gradientenkonstanz als Modellannahme verwendet wird. Geben Sie das modifizierte Energiefunktional an.
 - (c) Leiten Sie die Differentialgleichung her, die eine Lösung $u(x, z)$ notwendigerweise erfüllen muss.
(Randbedingungen müssen *nicht* angegeben werden.)
-



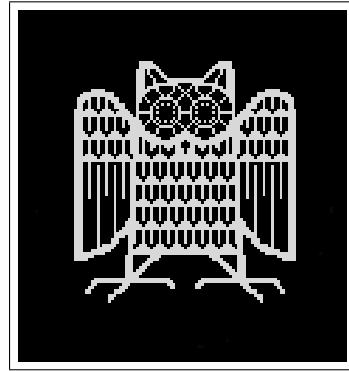
(O)



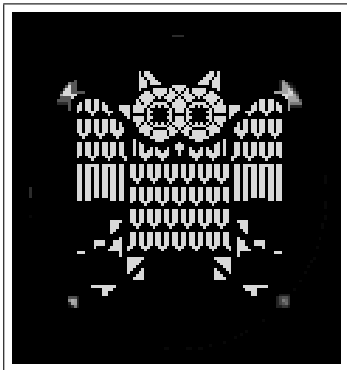
(A)



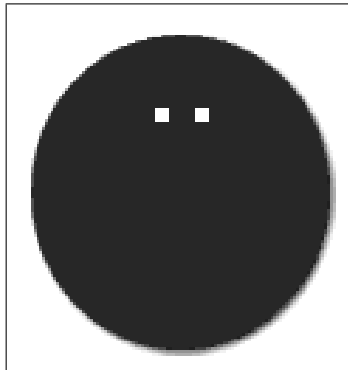
(B)



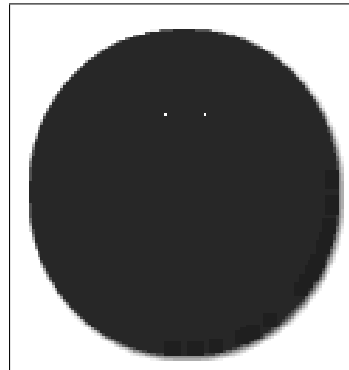
(C)



(D)



(E)



(F)

Figure for Problem 4 – Abbildung f

für Aufgabe 4

Problem 4 (Morphological operations)

The figure shows one original image **(O)** and six filtered images **(A)**–**(F)** which have been obtained from **(O)** by the following operations (not necessarily in the same order):

- | | | | | | |
|---------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|
| (1) Dilation | – | (2) Erosion | – | (3) Opening | – |
| (4) Closing | – | (5) Black top hat | – | (6) White top hat | |

All operations were performed using the same structuring element. State the exact correspondence between the images **(A)**–**(F)** and the filtering operations **(1)**–**(6)**.

Aufgabe 4 (Morphologische Operationen)

Die Abbildung zeigt ein Originalbild **(O)** und sechs gefilterte Bilder **(A)**–**(F)**, die aus **(O)** durch folgende Operationen (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) gewonnen wurden:

- | | | | | | |
|-----------------------|---|----------------------------------|---|-------------------------------|---|
| (1) Dilatation | – | (2) Erosion | – | (3) Öffnung | – |
| (4) Schließung | – | (5) Schwarzer Zylinderhut | – | (6) Weißer Zylinderhut | |

Alle Operationen wurden mit demselben Strukturelement ausgeführt. Geben Sie die exakte Zuordnung zwischen den Bildern **(A)**–**(F)** und den Filteroperationen **(1)**–**(6)** an.

Problem 5 (Derivative filter)

A sufficiently often continuously differentiable function $f(x)$ is sampled with pixel distance h , resulting in a discrete signal (f_i) . The goal is to approximate $f''(x)$ in pixel i using the five values $f_{i-2}, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, f_{i+2}$.

- (a) State the corresponding system of equations in matrix notation.
- (b) Determine the coefficients of the approximation.
- (c) Apply the resulting derivative filter to the signal

$$f = (\dots, 0, 0, 0, 0, 0, 24, 24, 24, 24, \dots)$$

which is continued by repeating 0 to the left and by 24 to the right.

Aufgabe 5 (Ableitungsfilter)

Eine hinreichend oft stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ wird im Pixelabstand h abgetastet, wobei sich ein diskretes Signal (f_i) ergibt. Ziel ist, $f''(x)$ im Pixel i unter Verwendung der fünf Werte $f_{i-2}, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, f_{i+2}$ zu approximieren.

- (a) Geben Sie das entsprechende Gleichungssystem in Matrixschreibweise an.
- (b) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Approximation.
- (c) Wenden Sie den erhaltenen Ableitungsfiler auf das Signal

$$f = (\dots, 0, 0, 0, 0, 0, 24, 24, 24, 24, \dots)$$

an, das durch Wiederholung von 0 nach links und 24 nach rechts fortgesetzt wird.

Problem 6 (Moments)

- (a) Compute the moments $m_{p,q}$ with $p \leq 1$ and $q \leq 1$ (in the sense of Lecture 29) of the discrete 2-D image

$$f = \begin{array}{|c|c|c|} \hline f_{11} & f_{21} & f_{31} \\ \hline f_{12} & f_{22} & f_{32} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 5 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

- (b) Compute the central moments $\mu_{p,q}$ with $p \leq 1$ and $q \leq 1$ for the image f .
(c) Prove that for any discrete 2-D image the equality

$$\mu_{1,1} = m_{1,1} - \bar{i}m_{0,1}$$

holds with $\bar{i} := \frac{m_{1,0}}{m_{0,0}}$. Please use only the general definitions of moments and central moments given in Lecture 29, Page 4/5.

Aufgabe 6 (Momente)

- (a) Berechnen Sie die Momente $m_{p,q}$ mit $p \leq 1$ und $q \leq 1$ (im Sinne der Vorlesung 29) des diskreten 2D-Bildes

$$f = \begin{array}{|c|c|c|} \hline f_{11} & f_{21} & f_{31} \\ \hline f_{12} & f_{22} & f_{32} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 5 & 4 & 4 \\ \hline \end{array}.$$

- (b) Berechnen Sie die zentralen Momente $\mu_{p,q}$ mit $p \leq 1$, $q \leq 1$ für das Bild f .
(c) Beweisen Sie, dass für jedes diskrete 2D-Bild die Gleichheit

$$\mu_{1,1} = m_{1,1} - \bar{i}m_{0,1}$$

mit $\bar{i} := \frac{m_{1,0}}{m_{0,0}}$ gilt. Verwenden Sie dazu ausschließlich die allgemeinen Definitionen der Momente und zentralen Momente in Vorlesung 29, Seite 4/5.
