

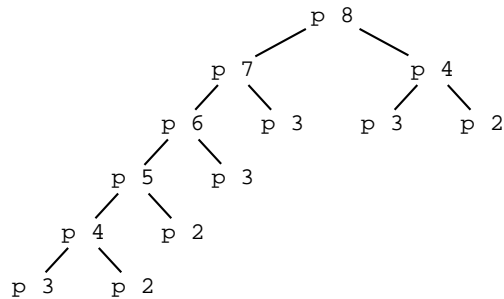


# **Programmierung:** **Musterlösung zum 7. Übungsblatt**

Prof. Gert Smolka und Thorsten Brunklaus

## **Aufgabe 7.1: Rekursionsbäume und Laufzeit(2+2+2)**

(a)



(b) p 8 hat die Laufzeit 13.

(c) `fun phi n = if n<4 then 1 else 1 + phi(n-1) + phi(n div 2)`

## **Aufgabe 7.2: Größter gemeinsamer Teiler(1+2+2+3+3+2+3)**

(a) Ja.

(b) `gcd(216,60)`  
|  
`gcd(156,60)`  
|  
`gcd(96,60)`  
|  
`gcd(36,60)`  
|  
`gcd(36,24)`  
|  
`gcd(12,24)`  
|  
`gcd(12,12)`

(c) `fun phi'(x,y,a) = if x=y then a  
                  else (if x<y then phi'(x, y-x, a+1) else phi'(x-y, y, a+1))`

`fun phi(x,y) = phi'(x,y,1)`

(d)

$\forall x, y \in \mathbb{N}^+ : x < y \Rightarrow (x, y) \succ (x, y - x)$

$\forall x, y \in \mathbb{N}^+ : x > y \Rightarrow (x, y) \succ (x - y, y)$

$\forall x, y, x', y' \in \mathbb{N}^+ : (x, y) \succ (x', y') \iff x + y > x' + y'$

(e) **Beweis** Durch Induktion über  $\max\{x, y\}$ .

Sei  $\max\{x, y\} = 1$ . Dann  $x = y = 1$ . Also  $\phi(x, y) = 1 \leq \max\{x, y\}$ .

Sei  $\max\{x, y\} > 1$ . Wir unterscheiden drei Fälle:

(i)  $x = y$ . Dann  $\phi(x, y) = 1 \leq \max\{x, y\}$ .

(ii)  $x > y$ . Dann

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= 1 + \phi(x - y, y) && \text{Definition von gcd} \\ &\leq 1 + \max\{x - y, y\} && \text{Induktionsannahme} \\ &\leq \max\{x, y\}\end{aligned}$$

(iii)  $x < y$ . Analog.

□

(f)  $y = 1$

(g) Es genügt zu zeigen, dass die Funktion

$$\begin{aligned}\text{gcd} &\in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ \text{gcd}(x, y) &= \text{if } x + y = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \max(T(x) \cap T(y))\end{aligned}$$

die definierende Gleichung von  $\text{gcd}$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$  erfüllt. Dies ist der Fall, wenn

$$\forall x, y \in \mathbb{N}^+ : x > y \Rightarrow T(x - y) \cap T(y) = T(x) \cap T(y)$$

gilt. Seien  $x, y \in \mathbb{N}^+$  mit  $x > y$ .

Sei  $k \in T(x) \cap T(y)$ . Dann

$$x - y = \lfloor x/k \rfloor k - \lfloor y/k \rfloor k = (\lfloor x/k \rfloor - \lfloor y/k \rfloor) \cdot k$$

Also  $k \in T(x - y)$ .

Sei  $k \in T(x - y) \cap T(y)$ . Dann

$$x = (x - y) + y = \lfloor (x - y)/k \rfloor k + \lfloor y/k \rfloor k = (\lfloor (x - y)/k \rfloor + \lfloor y/k \rfloor) \cdot k$$

Also  $k \in T(x)$ .

### Aufgabe 7.3: Iteratives Berechnen von balancierten Binärbäumen(2+2)

```
fun tree' (n,t) = if n<1 then t else tree'(n-1, N((),t,t))
```

```
fun tree n = tree'(n, L())
```

```
fun tree' (n,t,d) = if n<=d then t else tree'(n, N(d+1,t,t), d+1)
```

```
fun tree n = tree'(n, L 0, 0)
```

#### Aufgabe 7.4: Induktion über Listen(3+3+3+3+3)

(a) **Beweis** Durch Induktion über  $xs$ .

Sei  $xs = nil$ . Dann  $xs@nil = nil = xs$  mit der Definition von  $@$ .

Sei  $xs = x :: xr$ . Dann

$$\begin{aligned}(x :: xr)@nil &= x :: (xr@nil) && \text{Definition von } @ \\ &= x :: xr && \text{Induktionsannahme} \\ &= xs\end{aligned}$$

□

(b) **Beweis** Durch Induktion über  $xs$ .

Sei  $xs = nil$ . Dann

$$\begin{aligned}|xs@ys| &= |ys| && \text{Definition von } @ \\ &= |xs| + |ys| && \text{Definition von } |\_|\end{aligned}$$

Sei  $xs = x :: xr$ . Dann

$$\begin{aligned}|xs@ys| &= |x :: (xr@ys)| && \text{Definition von } @ \\ &= 1 + |xr@ys| && \text{Definition von } |\_| \\ &= 1 + |xr| + |ys| && \text{Induktionsannahme} \\ &= |xs| + |ys| && \text{Definition von } |\_|\end{aligned}$$

□

(c) **Beweis** Durch Induktion über  $xs$ .

Sei  $xs = nil$ . Dann  $|rev(nil)| = |nil| = |xs|$  mit der Definition von  $@$ .

Sei  $xs = x :: xr$ . Dann

$$\begin{aligned}|rev(xs)| &= |rev(xr)@[x]| && \text{Definition von } rev \\ &= |rev(xr)| + |[x]| && \text{Teil (3)} \\ &= |xr| + 1 && \text{Induktionsannahme und Definition von } |\_| \\ &= |xs| && \text{Definition von } |\_|\end{aligned}$$

□

(d) **Beweis** Durch Induktion über  $xs$ .

Sei  $xs = nil$ . Dann

$$\begin{aligned}rev(xs@ys) &= rev(ys) && \text{Definition von } @ \\ &= rev(ys)@nil && \text{Teil (2)} \\ &= rev(ys)@rev(xs) && \text{Definition von } rev\end{aligned}$$

Sei  $xs = x :: xr$ . Dann

$$\begin{aligned}
 rev(xs@ys) &= rev(x :: (xr@ys)) && \text{Definition von @} \\
 &= rev(xr@ys)@[x] && \text{Definition von rev} \\
 &= (rev(ys)@rev(xr))@[x] && \text{Induktionsannahme} \\
 &= rev(ys)@(rev(xr)@[x]) && \text{Teil (1)} \\
 &= rev(ys)@rev(xs) && \text{Definition von rev}
 \end{aligned}$$

□

(e) **Beweis** Durch Induktion über  $xs$ .

Sei  $xs = nil$ . Dann folgt mit der Definition von  $rev$   $rev(rev(xs)) = rev(nil) = nil = xs$ .

Sei  $xs = x :: xr$ . Dann

$$\begin{aligned}
 rev(rev(xs)) &= rev(rev(xr)@[x]) && \text{Definition von rev} \\
 &= rev([x])@rev(rev(xr)) && \text{Teil (5)} \\
 &= [x]@xr && \text{Definition von rev und Induktionsannahme} \\
 &= xs && \text{Definition von @}
 \end{aligned}$$

□

### Aufgabe 7.5: Iteratives Length(3+3+3)

(a)

$$\begin{aligned}
 len' &\in \mathcal{L}(X) \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\
 len'(nil, n) &= n \\
 len'(x :: xr, n) &= len'(xr, n + 1)
 \end{aligned}$$

(b) **Beweis** Durch Induktion über  $xs$ .

Sei  $xs = nil$ . Dann

$$\begin{aligned}
 len'(xs, n) &= n && \text{Definition von } len' \\
 &= |xs| + n && \text{Definition von } |\_|
 \end{aligned}$$

Sei  $xs = x :: xr$ . Dann

$$\begin{aligned}
 len'(xs, n) &= len'(xr, n + 1) && \text{Definition von } len' \\
 &= |xr| + n + 1 && \text{Induktionsannahme} \\
 &= |xs| + n && \text{Definition von } |\_|
 \end{aligned}$$

□

(c) 

```
fun len' (nil, n) = n
    | len' (_::xr, n) = len' (xr, n+1)
```

```
fun len xs = len' (xs, 0)
```

Laufzeit von `len(xs)` ist  $|xs| + 1$ .