



Programmierung:
Musterlösung zum 5. Übungsblatt

Prof. Gert Smolka und Thorsten Brunklaus

Aufgabe 5.1: Induktion (4) Durch Induktion über n .

Sei $n = 0$. Dann

$$\begin{aligned} f(n) &= 1 && \text{(nach Definition von } f) \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Sei $n > 0$. Dann

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n - 1) + 2n + 1 && \text{(nach Definition von } f) \\ &= n^2 + 2n + 1 && \text{(nach Induktionsannahme)} \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2: Induktion (4) Durch Induktion über n .

Sei $n = 0$. Dann

$$\begin{aligned} f(n) &= 0 && \text{(nach Definition von } f) \\ &= \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1) \end{aligned}$$

Sei $n > 0$. Dann

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n - 1) + n^2 && \text{(nach Definition von } f) \\ &= \frac{(n - 1)(2(n - 1)^2 + 3(n - 1) + 1)}{6} + n^2 && \text{(nach Induktionsannahme)} \\ &= \frac{(n - 1)(2n^2 - n)}{6} + n^2 \\ &= \frac{n}{6}((n - 1)(2n - 1) + 6n) \\ &= \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1) \end{aligned}$$

Aufgabe 5.3: Induktion (4) Durch Induktion über n . Sei $q \in \mathbb{R} - \{1\}$.

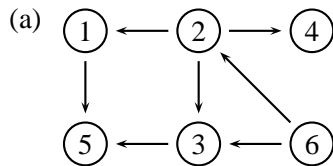
Sei $n = 0$. Dann

$$\begin{aligned} f(q, n) &= 1 && \text{(nach Definition von } f) \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

Sei $n > 0$. Dann

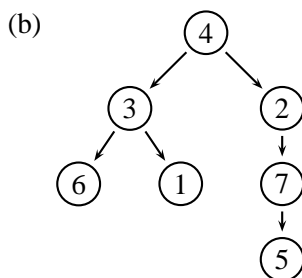
$$\begin{aligned}
 f(q, n) &= f(q, n-1) + q^n && \text{(nach Definition von } f) \\
 &= \frac{1 - q^n}{1 - q} + q^n && \text{(nach Induktionsannahme)} \\
 &= \frac{1 - q^n + q^n - q^{n+1}}{1 - q} \\
 &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.4: Graphen (2+2+2+2)



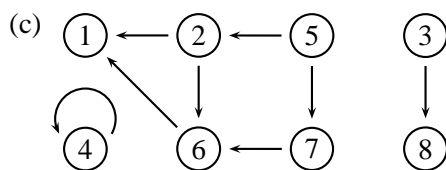
Größe: 6, Tiefe: 3, Quellen: {6}, Senken: {4, 5}

G ist azyklisch. G ist zusammenhängend, aber nicht stark zusammenhängend, denn 2 ist von 1 aus nicht erreichbar. G ist kein Wald, denn 3 hat zwei Vorgänger.



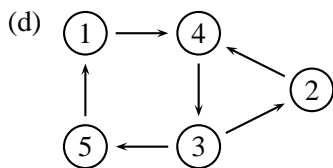
Größe: 7, Tiefe: 3, Quellen: {4}, Senken: {1, 5, 6}

G ist azyklisch. G ist zusammenhängend, aber nicht stark zusammenhängend, denn 2 ist von 1 aus nicht erreichbar. G ist ein Baum.



Größe: 8, Tiefe: 3, Quellen: {3, 5}, Senken: {1, 8}

G ist zyklisch mit Zyklus $\langle 4, 4 \rangle$. G ist nicht zusammenhängend. G ist kein Wald, denn 6 hat zwei Vorgänger.



Größe: 5, Tiefe: 4, Quellen: \emptyset , Senken: \emptyset

G ist zyklisch mit Zyklus $\langle 3, 2, 4, 3 \rangle$. G ist stark zusammenhängend. G ist kein Wald, denn G ist zyklisch.

Aufgabe 5.5: Bäume (9)

- (a) $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
 $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8), (6, 9), (6, 10), (7, 11), (7, 12), (9, 13), (9, 14), (12, 15)\}$

(b)

[]	1
[1]	2
[1,1]	4
[1,1,1]	8
[1,2]	5
[1,3]	6
[1,3,1]	9
[1,3,1,1]	13
[1,3,1,2]	14
[1,3,2]	10
[2]	3
[2,1]	7
[2,1,1]	11
[2,1,2]	12
[2,1,2,1]	15

(c)

$\langle 1, \langle 2, \langle 4, \langle 8 \rangle \rangle, \langle 5 \rangle, \langle 6, \langle 9, \langle 13 \rangle, \langle 14 \rangle \rangle, \langle 10 \rangle \rangle \rangle, \langle 3, \langle 7, \langle 11 \rangle, \langle 12, \langle 15 \rangle \rangle \rangle \rangle$

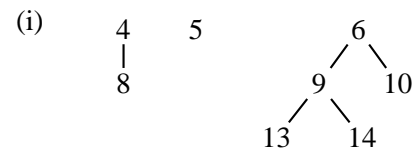
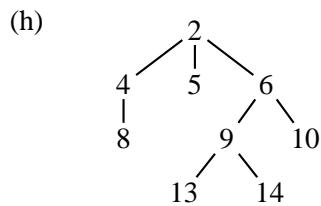
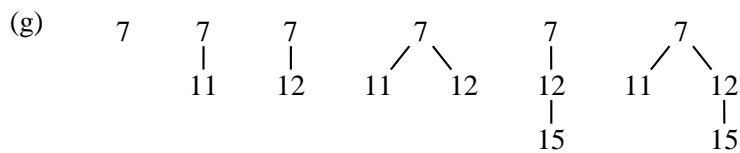
(d) Größe ist 15, Tiefe ist 4.

(e) Wurzel: 1

Blätter: 5, 8, 10, 11, 13, 14, 15

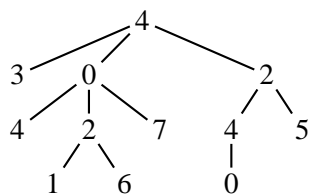
Innere Knoten: 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12

- (f) Pfad zu 5: $\langle 1, 2, 5 \rangle$,
 Pfad zu 8: $\langle 1, 2, 4, 8 \rangle$,
 Pfad zu 10: $\langle 1, 2, 6, 10 \rangle$,
 Pfad zu 11: $\langle 1, 3, 7, 11 \rangle$,
 Pfad zu 13: $\langle 1, 2, 6, 9, 13 \rangle$,
 Pfad zu 14: $\langle 1, 2, 6, 9, 14 \rangle$,
 Pfad zu 15: $\langle 1, 3, 7, 12, 15 \rangle$



Aufgabe 5.6: Geordnete Bäume (2+2+1+2+2)

(a)



(b) Größe ist 12, Tiefe ist 3.

(c) 3 Unterbäume.

(d)

$[]$	2
$[1]$	4
$[1,1]$	0
$[2]$	5

(e)

$[]$	4
------	---

Aufgabe 5.7: Größenverhältnis in Binärbäumen (4) Durch Induktion über $t(B)$.

Sei $t(B) = 0$. Dann hat B genau einen Knoten. Also $b(B) = 1 \leq 2^{t(B)}$.

Sei $t(B) > 0$. Seien B_1 und B_2 die zwei Unterbäume von B . Es gilt

$$t(B_1) \leq t(B) - 1 \quad \wedge \quad t(B_2) \leq t(B) - 1$$

Also

$$\begin{aligned} b(B) &= b(B_1) + b(B_2) \\ &\leq 2^{t(B_1)} + 2^{t(B_2)} && \text{(nach Induktionsannahme)} \\ &\leq 2^{t(B)-1} + 2^{t(B)-1} && \text{(mit den obigen Ungleichungen)} \\ &= 2^{t(B)} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.8: Größenverhältnisse in ternären Bäumen (4+4)

(a) Durch Induktion über $t(B)$.

Sei $t(B) = 0$. Dann hat B genau einen Knoten. Also $b(B) = 1 = 3^{t(B)}$.

Sei $t(B) > 0$. Seien B_1 , B_2 und B_3 die drei Unterbäume von B . Da B balanciert ist, gilt $t(B_1) = t(B_2) = t(B_3) = t(B) - 1$. Also

$$\begin{aligned} b(B) &= b(B_1) + b(B_2) + b(B_3) \\ &= 3^{t(B_1)} + 3^{t(B_2)} + 3^{t(B_3)} && \text{(nach Induktionsannahme)} \\ &= 3^{t(B)-1} + 3^{t(B)-1} + 3^{t(B)-1} \\ &= 3^{t(B)} \end{aligned}$$

(b) Durch Induktion über $t(B)$.

Sei $t(B) = 0$. Dann hat B genau einen Knoten. Also $g(B) = 1 = \frac{1}{2}(3^{t(B)+1} - 1)$.

Sei $t(B) > 0$. Seien B_1 , B_2 und B_3 die drei Unterbäume von B . Da B balanciert ist, gilt $t(B_1) = t(B_2) = t(B_3) = t(B) - 1$. Also

$$\begin{aligned} g(B) &= 1 + g(B_1) + g(B_2) + g(B_3) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(3^{t(B_1)+1} - 1) + \frac{1}{2}(3^{t(B_2)+1} - 1) + \frac{1}{2}(3^{t(B_3)+1} - 1) && \text{(nach Induktionsannahme)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(3 \cdot 3^{t(B)} - 3) \\ &= \frac{1}{2}(3^{t(B)+1} - 1) \end{aligned}$$

Aufgabe 5.9: Balancierte Binärbäume (Challenge, ohne Punkte) Durch Induktion über $t(B)$. Sei $b(B) = 2^{t(B)}$.

Sei $t(B) = 0$. Dann hat B genau einen Knoten. Also ist B balanciert.

Sei $t(B) > 0$. Seien B_1 und B_2 die zwei Unterbäume von B . Mit der Ungleichung aus Aufgabe ?? und $b(B) = 2^{t(B)}$ folgt:

$$2^{t(B)} = b(B) = b(B_1) + b(B_2) \leq 2^{t(B_1)} + 2^{t(B_2)}$$

Wir zeigen jetzt durch Fallunterscheidung, dass $t(B_1) = t(B_2)$.

(a) Sei $t(B_1) \leq t(B_2)$. Dann $t(B) = 1 + t(B_2)$. Also gilt mit der obigen Ungleichung: $2 \cdot 2^{t(B_2)} \leq 2^{t(B_1)} + 2^{t(B_2)}$. Also $2^{t(B_2)} \leq 2^{t(B_1)}$. Also $t(B_2) \leq t(B_1)$. Also $t(B_1) = t(B_2)$.

(b) Sei $t(B_1) \geq t(B_2)$. Analog.

Mit der Ungleichung aus Aufgabe ?? und $t(B_1) = t(B_2) = t(B) - 1$ folgt $b(B_1) \leq \frac{1}{2}2^{t(B)}$ und $b(B_2) \leq \frac{1}{2}2^{t(B)}$. Da $b(B_1) + b(B_2) = b(B) = 2^{t(B)}$, folgt $b(B_1) = b(B_2) = \frac{1}{2}2^{t(B)}$. Also $b(B_1) = 2^{t(B_1)}$ und $b(B_2) = 2^{t(B_2)}$. Also folgt mit der Induktionsannahme, dass B_1 und B_2 balanciert sind. Also ist B balanciert, da $t(B_1) = t(B_2)$.