



**Programmierung:
Musterlösung zum 2. Übungsblatt**

Prof. Gert Smolka und Thorsten Brunklaus

Aufgabe 2.1: Auswertungsprotokolle (4+1+1)

(a) $f(3,1)$
-> if 3=0 then 1 else $f(3-1, 1*3)$
-> if false then 1 else $f(3-1, 1*3)$
-> $f(3-1, 1*3)$
-> $f(2, 1*3)$
-> $f(2,3)$
-> if 2=0 then 3 else $f(2-1, 3*2)$
-> if false then 3 else $f(2-1, 3*2)$
-> $f(2-1, 3*2)$
-> $f(1, 3*2)$
-> $f(1, 6)$
-> if 1=0 then 6 else $f(1-1, 6*1)$
-> if false then 6 else $f(1-1, 6*1)$
-> $f(1-1, 6*1)$
-> $f(0, 6*1)$
-> $f(0, 6)$
-> if 0=0 then 6 else $f(0-1, 6*0)$
-> if true then 6 else $f(0-1, 6*0)$
-> 6

(b) Für (n, a) mit $n < 0$.

(c) Ja, beide Prozeduren berechnen für $n \geq 0$ die Fakultätsfunktion.

Aufgabe 2.2: Produkte und Summen (1+1+1+1)

(a) $\mathbb{B} \times \mathbb{B} = \{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}$

(b) $\mathbb{B} \uplus \mathbb{B} = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$

(c) $\mathbb{B} \uplus \mathbb{B} \uplus \mathbb{B} = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$

(d) $\mathbb{B} \uplus (\mathbb{B} \times \mathbb{B}) = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, \langle 0, 0 \rangle \rangle, \langle 2, \langle 1, 0 \rangle \rangle, \langle 2, \langle 0, 1 \rangle \rangle, \langle 2, \langle 1, 1 \rangle \rangle\}$

Aufgabe 2.3: Endliche Funktionen (1+1+1+4+1+1+1+1+1)

(a)

$f = \lambda (x, y) \in \mathbb{B}^2 . \text{ if } x = 1 \text{ then } y \text{ else } 0$

$g = \lambda (x, y) \in \mathbb{B}^2 . \text{ if } x = 0 \text{ then } y \text{ else } 1$

(b)

$f = \{\langle \langle 0, 0 \rangle, 0 \rangle, \langle \langle 1, 0 \rangle, 0 \rangle, \langle \langle 0, 1 \rangle, 0 \rangle, \langle \langle 1, 1 \rangle, 1 \rangle\}$

$g = \{\langle \langle 0, 0 \rangle, 0 \rangle, \langle \langle 1, 0 \rangle, 1 \rangle, \langle \langle 0, 1 \rangle, 1 \rangle, \langle \langle 1, 1 \rangle, 1 \rangle\}$

(c)

$$\begin{aligned} f + g = g &= \lambda (x, y) \in \mathbb{B}^2 . \text{ if } x = 0 \text{ then } y \text{ else } 1 \\ &= \{ \langle \langle 0, 0 \rangle, 0 \rangle, \langle \langle 1, 0 \rangle, 1 \rangle, \langle \langle 0, 1 \rangle, 1 \rangle, \langle \langle 1, 1 \rangle, 1 \rangle \} \end{aligned}$$

(d) (i) Gültig (\mathbb{B} endlich)

(ii) Gültig

(iii) Gültig (\mathbb{B} endlich)

(iv) Falsch ($\emptyset \in (\mathbb{B}^2 \xrightarrow{fin} \mathbb{B}) - (\mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B})$)

(e) \emptyset

(f) $\{ \langle \langle 0, 0 \rangle, 0 \rangle, \langle \langle 1, 1 \rangle, 1 \rangle \}$

(g) Nein, da $|\mathbb{B}^2| > |\mathbb{B}|$

(h)

$$|\mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}| = 2^4 = 16$$

$$|\mathbb{B}^2 \rightharpoonup \mathbb{B}| = 3^4 = 81$$

(i)

$$|X \rightarrow Y| = |Y|^{|X|}$$

$$|X \rightharpoonup Y| = (|Y| + 1)^{|X|}$$

Aufgabe 2.4: Kaskadierte Funktionen (4+4)

(a)

$$\begin{aligned} f' &= \lambda x \in \mathbb{B} . \lambda y \in \mathbb{B} . f(x, y) \\ &= \{ (0, \{ (0, 1), (1, 0) \}), (1, \{ (0, 0), (1, 1) \}) \} \end{aligned}$$

(b) (i)

$$\begin{aligned} K &= \lambda f \in \mathbb{B} \rightarrow (\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}) . \lambda (x, y) \in \mathbb{B}^2 . (f(x))(y) \\ &= \{ (f, g) \mid f \in \mathbb{B} \rightarrow (\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}) \wedge g = \{ ((x, y), z) \mid (x, y) \in \mathbb{B}^2 \wedge z = (f(x))(y) \} \} \end{aligned}$$

(ii) Ja. Die Umkehrfunktion ist $\lambda f \in ((\mathbb{B} \times \mathbb{B}) \rightarrow \mathbb{B}) . \lambda x \in \mathbb{B} . \lambda y \in \mathbb{B} . f(x, y)$.

Aufgabe 2.5: Rekursive Definition mit Inferenzregeln (4+3+3)(a) (i) Ableitung für $(3, 5, 15) \in P$:

- (1) $(0, 5, 0) \in P$ mit Regel 1
- (2) $(1, 5, 5) \in P$ mit Regel 2, (1)
- (3) $(2, 5, 10) \in P$ mit Regel 2, (2)
- (4) $(3, 5, 15) \in P$ mit Regel 2, (3)

(ii) Ableitungsbaum für $(3, 5, 15) \in P$:
$$\begin{array}{c}
 (0, 5, 0) \\
 | \\
 (1, 5, 5) \\
 | \\
 (2, 5, 10) \\
 | \\
 (3, 5, 15)
 \end{array}$$
(b) $P = \{ (0, y, 0) \mid y \in \mathbb{N} \} \cup \{ (x+1, y, z+y) \mid (x, y, z) \in P \}$ (c) $p = \lambda (x, y) \in \mathbb{N}^2. x * y$ **Aufgabe 2.6: Listen (2+2+2+2+2)**(a)
$$\frac{}{\langle \rangle \in L} \quad \frac{x \in \mathbb{N} \quad r \in L}{\langle x, r \rangle \in L}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 length &\in L \rightarrow \mathbb{N} \\
 length(\langle \rangle) &= 0 \\
 length(\langle x, r \rangle) &= 1 + length(r)
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 sum &\in L \rightarrow \mathbb{N} \\
 sum(\langle \rangle) &= 0 \\
 sum(\langle x, r \rangle) &= x + sum(r)
 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
 @ &\in L \times L \rightarrow L \\
 @(\langle \rangle, y) &= y \\
 @(\langle x, xr \rangle, y) &= \langle x, @(xr, y) \rangle
 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
 reverse &\in L \rightarrow L \\
 reverse(\langle \rangle) &= \langle \rangle \\
 reverse(\langle x, xr \rangle) &= reverse(xr) @ \langle x, \langle \rangle \rangle
 \end{aligned}$$