

Kapitel 2

Mathematische Objekte

Im Zusammenhang mit Programmiersprachen benötigen wir eine Vielzahl von *gedanklichen Objekten*. Dazu gehören zum Beispiel Ausdrücke, Programme, Prozeduren und Umgebungen. Wir führen jetzt einen gedanklichen Baukasten ein, mit dem eine große Klasse von gedanklichen Objekten konstruiert werden kann. Die Konstruktion eines Objektes mithilfe der Bausteine und Regeln des Baukastens macht dieses zu einem konkreten, vollständig beschriebenen gedanklichem Gegenstand.

Die systematische Untersuchung von gedanklichen Objekten findet seit Jahrhunderten in der Mathematik statt. Ab etwa 1875 wurde von Cantor, Zermelo, Fränkel und anderen ein Baukasten für die Konstruktion mathematischer Objekte entwickelt, der unter dem Namen *Mengenlehre* bekannt ist.

Die im Zusammenhang mit Programmiersprachen benötigten gedanklichen Objekte können alle als mathematische Objekte im Rahmen der Mengenlehre konstruiert werden. Im Folgenden geben wir eine kleine Einführung in die Mengenlehre, die auf die Bedürfnisse der programmiersprachlichen Informatik ausgerichtet ist. Dabei führen wir die wichtigsten Begriffe und Notationen für einige grundlegenden mathematische Objekte ein, die als Tupel, Mengen, Relationen und Funktionen bezeichnet werden.

2.1 Tupel und Mengen

Zunächst legen wir fest, dass die reellen Zahlen mathematische Objekte sind. Wir nehmen an, dass Sie mit den reellen Zahlen vertraut sind und diese keiner weiteren Erklärung bedürfen. Zusätzlich zu den reellen Zahlen werden wir Tupel und Mengen betrachten. Das ist schon alles. Jedes mathematische Objekt ist also entweder

eine reelle Zahl, ein Tupel oder eine Menge. Statt von mathematischen Objekten sprechen wir im Folgenden auch einfach von **Objekten**.

Wir beginnen mit Tupeln, die wir im letzten Kapitel bereits im programmiersprachlichen Kontext kennengelernt haben. Ein ***n*-stelliges Tupel** ist ein Objekt der Form

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

das aus $n \geq 0$ Objekten $x_1, \dots, x_n$ zusammengesetzt ist. Die Objekte $x_1, \dots, x_n$ bezeichnen wir als **Konstituenten** oder **Komponenten** des Tupels. Die Konstituenten eines Tupels sind geordnet. Dasselbe Objekt kann mehrfach als Konstituente eines Tupels auftreten, zum Beispiel 1 in $\langle 1, 1 \rangle$. Es gibt genau ein nullstelliges Tupel $\langle \rangle$, das wir als **leeres Tupel** bezeichnen.

Das **Gleichheitsaxiom für Tupel** formuliert eine wichtige Grundannahme: *Zwei Tupel $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$ und $\langle y_1, \dots, y_n \rangle$ sind genau dann gleich, wenn $m = n$ und $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$ gilt.*

Zweistellige Tupel bezeichnen wir als **Paare** und dreistellige Tupel als **Tripel**. Tupel mit keiner oder mit mindestens zwei Komponenten schreiben wir auch mit runden Klammern:

$$(x_1, \dots, x_n)$$

Die Konstituente x_i eines Tupels $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ bezeichnen wir als die ***i*-te Komponente** des Tupels.

Objekte können auch zu **Mengen** zusammengefasst werden. Beispielsweise kann man die natürlichen Zahlen 0 und 1 zu der Menge $\{1, 2\}$ zusammenfassen. Man kann aber auch alle reellen Zahlen zu einer Menge zusammenfassen. Mengen unterscheiden sich von Tupeln in drei Punkten: Für die Konstituenten einer Menge ist keine Ordnung festgelegt; dasselbe Objekt kann nicht mehrfach als Konstituente einer Menge auftreten; und Mengen können unendlich viele Konstituenten haben.

Die Konstituenten einer Menge werden als **Elemente der Menge** bezeichnet. Man sagt auch, dass eine Menge ihre Elemente **enthält**. Man schreibt $x \in X$, um zu sagen, dass das Objekt x ein Element der Menge X ist. Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente enthält. Diese Menge heißt **leere Menge** und wird mit $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet.

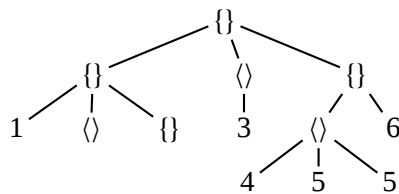
Das **Gleichheitsaxiom für Mengen** formuliert die folgende Grundannahme: *Zwei Mengen X und Y sind genau dann gleich, wenn jedes Element von X ein Element von Y ist, und wenn umgekehrt auch jedes Element von Y ein Element von X ist.*

Wir unterscheiden zwischen **atomaren und zusammengesetzten Objekten**. Zahlen, das leere Tupel und die leere Menge sind atomare Objekte. Nichtleere Tupel und nichtleere Mengen sind zusammengesetzte Objekte. Jedes zusammengesetzte Objekt hat mindestens eine Konstituente. Wir haben bereits gesagt, dass die Konstituenten eines Tupels Komponenten des Tupels und die Konstituenten einer Menge Elemente der Menge heißen. Die Konstituenten eines Objekts bezeichnen wir auch als seine **Unterobjekte**.

Der Aufbau von zusammengesetzten Objekten lässt sich mit sogenannten **Baumdarstellungen** verdeutlichen. Beispielsweise hat das Objekt

$$\{\{1, \langle \rangle, \emptyset\}, \langle 3 \rangle, \{\langle 4, 5, 5 \rangle, 6\}\}$$

die **Baumdarstellung**



Seien x und y zwei Objekte. Wir schreiben $x \triangleleft y$, wenn x ein zusammengesetztes Objekt ist und y eine Konstituente von x ist. Ein Objekt y heißt **Teilobjekt** eines zusammengesetzten Objektes x , wenn es $n \geq 1$ Objekte $x_1, \dots, x_n$ wie folgt gibt:

$$x = x_1 \triangleleft x_2 \triangleleft x_3 \triangleleft \dots \triangleleft x_n = y$$

Ein Teilobjekt y von x heißt **echtes Teilobjekt** von x , wenn $y \neq x$ gilt.

Für das oben dargestellte Objekt $x = \{\{1, \langle \rangle, \emptyset\}, \langle 3 \rangle, \{\langle 4, 5, 5 \rangle, 6\}\}$ gilt:

- x hat 3 Unterobjekte.
- x hat 13 Teilobjekte.
- x hat 12 echte Teilobjekte.

Ein Objekt heißt **endlich**, wenn es nur endlich viele Konstituenten hat. Atomare Objekte und Tupel sind immer endlich. Mengen können endlich oder unendlich sein.

Ein Objekt heißt **finitär**, wenn es nur endlich viele Teilobjekte hat. Finitäre Objekte haben endliche Baumdarstellungen. Objekte, die nicht finitär sind, heißen **infinitär**. Wenn X eine unendliche Menge ist, dann ist die Menge $\{X\}$ ein endliches und infinitäres Objekt.

Das **Wohlfundierungsaxiom** formuliert eine weitere Grundannahme für mathematische Objekte: *Es gibt keine unendliche Folge $x_1, x_2, x_3, \dots$ von Objekten, für die gilt: $x_1 \triangleleft x_2 \triangleleft x_3 \triangleleft \dots$.* Wohlfundiertheit bedeutet, dass man bei einem zusammengesetzten Objekt nach endlich vielen Abstiegen zu einer Konstituente stets auf ein atomares Objekt stößt.

Proposition 2.1.1 *Es gibt keine Menge, die alle Objekte enthält.*

Beweis Wir zeigen die Behauptung durch Widerspruch. Angenommen, X ist eine Menge, die alle Objekte enthält. Da X ein Objekt ist, gilt $X \in X$. Also gilt $X \triangleleft X$. Daraus folgt aber, dass $X, X, X, \dots$ eine unendliche Folge ist, die nach dem Wohlfundierungsaxiom nicht existieren kann. Widerspruch. $\square$

Sie werden sich wahrscheinlich fragen, warum die Mengenlehre das Wohlfundierungsaxiom annimmt. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass auch bei gedanklichen Objekten nicht alles möglich ist. Beispielsweise führt die Annahme der Existenz einer Menge, die alle Mengen enthält, sofort zu einem Widerspruch. Dieses Phänomen wurde 1905 von Bertrand Russell entdeckt (so genannte Russellsche Antinomien).

2.2 Aussagen

Eine mathematische Aussage ist die Formulierung einer Eigenschaft von mathematischen Objekten, die entweder wahr oder falsch ist. Ein typisches Beispiel ist $1 + 1 = 3$. Um mathematische Aussagen übersichtlich formulieren zu können, verwenden wir die folgenden logischen Notationen (A und B sind Aussagen):

$A \wedge B$	A und B	Konjunktion
$A \vee B$	A oder B	Disjunktion
$\neg A$	nicht A	Negation
$A \Rightarrow B$	aus A folgt B	Implikation
$A \Leftarrow B$	A folgt aus B	Implikation
$A \iff B$	A genau dann, wenn B	Äquivalenz
$\forall x \in X: A$	für alle $x \in X$ gilt A	Universelle Quantifizierung
$\exists x \in X: A$	es existiert ein $x \in X$ sodass A	Existentielle Quantifizierung

Eine Aussage der Form $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \Rightarrow B$ schreiben wir manchmal auch als

Inferenzregel:

$$\frac{A_1 \quad \dots \quad A_n}{B}$$

Wir bezeichnen dann $A_1, \dots, A_n$ als die **Prämissen** und B als die **Konklusion** der Regel.

Hier sind zwei Beispiele für die Verwendung logischer Notationen. Für die Gleichheit von zwei Mengen X und Y gilt:

$$X = Y \iff (\forall x \in X: x \in Y) \wedge (\forall y \in Y: y \in X)$$

Für die Gleichheit von zwei Tupeln gilt:

$$\langle x_1, \dots, x_m \rangle = \langle y_1, \dots, y_n \rangle \iff m = n \wedge x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n$$

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Aussagen A und B gültig:

A	$\iff$	$\neg A \Rightarrow$ Widerspruch	<i>tertium non datur</i>
$A \Rightarrow B$	$\iff$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	<i>Kontraposition</i>
$\neg(A \wedge B)$	$\iff$	$\neg A \vee \neg B$	
$\neg(A \vee B)$	$\iff$	$\neg A \wedge \neg B$	
$\neg(A \Rightarrow B)$	$\iff$	$A \wedge \neg B$	
$\neg \forall x \in X: A$	$\iff$	$\exists x \in X: \neg A$	
$\neg \exists x \in X: A$	$\iff$	$\forall x \in X: \neg A$	

2.3 Begriffe und Notationen für Mengen

Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge heißt **Kardinalität** der Menge. Die Kardinalität einer endlichen Menge X bezeichnen wir mit $|X|$. Eine **n -elementige Menge** ($n \geq 0$) ist eine endliche Menge mit der Kardinalität n . Zu $n \geq 0$ verschiedenen Objekten $x_1, \dots, x_n$ gibt es genau eine n -elementige Menge, die genau diese Objekte als Elemente enthält. Diese Menge kann durch $\{x_1, \dots, x_n\}$ dargestellt werden.

Die **Inklusionsbeziehung** zwischen zwei Mengen X und Y ist wie folgt definiert:

$$X \subseteq Y \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in X: x \in Y$$

Wenn $X \subseteq Y$ gilt, sagt man, dass X eine **Teilmenge** von Y ist; weiter sagt man, dass Y eine **Obermenge** von X ist. Zwischen Gleichheit und Inklusion von zwei Mengen X und Y besteht der folgende Zusammenhang:

$$X = Y \iff X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$$

Die **strikte Inklusionsbeziehung** zwischen zwei Mengen X und Y ist wie folgt definiert:

$$X \subsetneq Y \stackrel{\text{def}}{\iff} X \subseteq Y \wedge X \neq Y$$

Zwei Mengen heißen **disjunkt**, wenn sie kein gemeinsames Element haben.

Wir benutzen die folgende Notation (sprich „ x ist kein Element von X “):

$$x \notin X \stackrel{\text{def}}{\iff} \neg(x \in X)$$

Seien X und Y zwei Mengen. Der **Schnitt**, die **Vereinigung** und die **Differenz** von X und Y sind die wie folgt definierten Mengen:

$$\begin{array}{ll} X \cap Y \stackrel{\text{def}}{=} \{z \mid z \in X \wedge z \in Y\} & \textbf{Schnitt} \\ X \cup Y \stackrel{\text{def}}{=} \{z \mid z \in X \vee z \in Y\} & \textbf{Vereinigung} \\ X - Y \stackrel{\text{def}}{=} \{z \mid z \in X \wedge z \notin Y\} & \textbf{Differenz} \end{array}$$

Die **Potenzmenge**

$$\mathcal{P}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{Y \mid Y \subseteq X\}$$

einer Menge X ist die Menge aller Teilmengen von X . Wenn X eine endliche Menge mit n Elementen ist, dann ist $\mathcal{P}(X)$ eine endliche Menge mit 2^n Elementen. Mit

$$\mathcal{P}_{fin}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{Y \mid Y \subseteq X \wedge Y \text{ endlich}\}$$

bezeichnen wir die Menge aller endlichen Teilmengen der Menge X .

Das **Produkt** von $n \geq 2$ Mengen $X_1, \dots, X_n$ ist die Menge

$$X_1 \times \dots \times X_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle x_1, \dots, x_n \rangle \mid x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}$$

aller n -stelligen Tupel, deren i -te Komponente jeweils aus X_i ist. Für ein Produkt $X \times \dots \times X$ schreibt man kürzer X^n , wobei $n \geq 2$ die Anzahl der Faktoren angibt.

Die **Summe** von $n \geq 2$ Mengen $X_1, \dots, X_n$ ist die Menge

$$X_1 \uplus \dots \uplus X_n \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle i, x \rangle \mid i \in \{1, \dots, n\} \wedge x \in X_i \}$$

Die Elemente einer Summe sind also Paare $\langle i, x \rangle$, die aus einer sogenannten **Vari-
antennummer** i und einem Element x aus dem entsprechenden **Summanden** X_i
bestehen. Statt von Summen spricht man auch von **disjunkten Vereinigungen**.

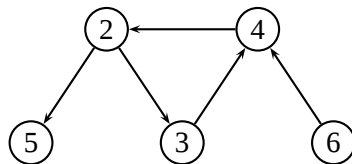
2.4 Binäre Relationen

Eine **n -stellige Relation** ist eine Menge, deren Elemente n -stellige Tupel sind.
Eine **binäre Relation** ist eine zweistellige Relation. Eine **binäre Relation auf
einer Menge** X ist eine Teilmenge von $X \times X$.

Hier ist ein Beispiel für eine binäre Relation:

$$\{(2, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 2), (6, 4)\}$$

Graphisch können wir diese Relation wie folgt darstellen:



Jeder Pfeil beschreibt ein Paar der Relation. Man spricht von der **Graphdarstellung** der Relation. Die durch die Pfeile verbundenen Objekte bezeichnet man als die **Knoten** der Graphdarstellung, und die Pfeile als **Kanten** der Graphdarstellung.

Binäre Relationen bezeichnet man oft mit Symbolen wie $\leq$. Statt $(x, y) \in \leq$ schreibt man dann kürzer und lesbarer $x \leq y$.

Der **Definitionsbereich** (englisch „domain“) und der **Wertebereich** (englisch „range“) einer binären Relation r sind wie folgt definiert:

$$\text{Dom } r \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid \exists y: (x, y) \in r \}$$

$$\text{Ran } r \stackrel{\text{def}}{=} \{ y \mid \exists x: (x, y) \in r \}$$

Der Definitionsbereich der oben dargestellten Relation ist die Menge $\{2, 3, 4, 6\}$, und der Wertebereich ist $\{2, 3, 4, 5\}$. Aus der Sicht der Graphdarstellung besteht der Definitionsbereich gerade aus allen Knoten, von denen eine Kante ausgeht, und der Wertebereich aus allen Knoten, auf die eine Kante zeigt.

Eine binäre Relation kann man sich als eine Zuordnung vorstellen, die jedem Element ihres Definitionsbereichs mindestens ein Element ihres Wertebereichs zuordnet. Diese Zuordnung wird durch die Kanten der Graphdarstellung anschaulich beschrieben. Beispielsweise ordnet die oben dargestellte Relation der Zahl 2 die Zahlen 5 und 3 zu.

Die **Komposition** $r \circ r'$ von zwei binären Relationen r und r' ist die wie folgt definierte binäre Relation:

$$r \circ r' \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, z) \mid \exists (x, y) \in r : (y, z) \in r' \}$$

Die **Umkehrrelation** r^{-1} einer binären Relation r ist die wie folgt definierte binäre Relation:

$$r^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, y) \mid (y, x) \in r \}$$

Offensichtlich gilt $(r^{-1})^{-1} = r$. Statt Umkehrrelation sagt man auch **inverse Relation**.

Eine binäre Relation r heißt

- **transitiv**, wenn $r \circ r \subseteq r$.
- **symmetrisch**, wenn $r = r^{-1}$.
- **antisymmetrisch**, wenn $\forall (x, y) \in r \cap r^{-1} : x = y$.

Unsere Beispielsrelation hat keine diese Eigenschaften.

Sei X eine Menge. Die **Identität von X** ist die wie folgt definierte binäre Relation:

$$I_X \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, x) \mid x \in X \}$$

Offensichtlich gilt $I_X = I_X^{-1} = I_X \circ I_X$. Außerdem ist I_X transitiv, symmetrisch und antisymmetrisch.

Eine binäre Relation r auf X heißt **reflexiv** (bezogen auf X), wenn $I_X \subseteq r$.

2.5 Funktionen

Eine binäre Relation r heißt **funktional**, wenn zu jedem $x \in \text{Dom } r$ genau ein $y \in \text{Ran } r$ existiert mit $(x, y) \in r$. Unsere oben dargestellte Beispielsrelation ist nicht funktional, da sie 2 sowohl 5 als 3 zuordnet.

Eine **Funktion** ist eine funktionale binäre Relation.

Proposition 2.5.1 Wenn f und g Funktionen sind, dann ist $f \circ g$ eine Funktion.

Eine endliche Funktion $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ kann man als eine Tabelle

x_1	y_1
x_2	y_2
$\dots$	$\dots$
x_n	y_n

darstellen, bei der die linksstehenden Einträge $x_1, \dots, x_n$ paarweise verschieden sind. Beispielsweise kann man die Funktion $\{(3, 4), (5, 7), (7, 10)\}$ durch die folgende Tabelle darstellen:

3	4
5	7
7	10

Eine endliche Funktion $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ schreiben wir auch als

$$\{x_1 \mapsto y_1, \dots, x_n \mapsto y_n\}$$

Sei f eine Funktion. Wenn $(x, y) \in f$ gilt, sagt man, dass f für das **Argument** x das **Ergebnis** y liefert. Das Ergebnis von f für x bezeichnet man mit $f(x)$. Statt $(x, y) \in f$ schreibt man meistens $f(x) = y$.

Seien X und Y Mengen. Wir werden die folgenden Notationen benutzen:

$$X \rightarrow Y \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \mid f \text{ Funktion mit } \text{Dom } f \subseteq X \text{ und } \text{Ran } f \subseteq Y \}$$

$$X \rightarrow Y \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in X \rightarrow Y \mid \text{Dom } f = X \}$$

$$X \xrightarrow{\text{fin}} Y \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in X \rightarrow Y \mid f \text{ endliche Menge} \}$$

Die Elemente von $X \rightarrow Y$ bezeichnet wir als **Funktionen von X nach Y** . Die Elemente von $X \rightarrow Y$ bezeichnet wir als **totale Funktionen** von X nach Y . Die Elemente von $X \xrightarrow{\text{fin}} Y$ bezeichnet wir als **endliche Funktionen** von X nach Y .

Statt $f \in X \rightarrow Y$ schreiben wir auch $f : X \rightarrow Y$ oder „ f Funktion $X \rightarrow Y$ “.

Proposition 2.5.2 Sei $f \in X \rightarrow Y$ und $g \in Y \rightarrow Z$. Dann $f \circ g \in X \rightarrow Z$ und

$$\forall x \in X: (f \circ g)(x) = g(f(x))$$

Injektive Funktionen

Eine binäre Relation r heißt **injektiv**, wenn die Umkehrrelation r^{-1} funktional ist. Wenn f eine injektive Funktion ist, bezeichnet man f^{-1} als die **Umkehrfunktion** oder die **inverse Funktion für f** .

Proposition 2.5.3 Wenn r und r' injektive binäre Relationen sind, dann ist $r \circ r'$ eine injektive binäre Relation.

Proposition 2.5.4 Für jede Funktion f sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. f injektiv.
2. $f \circ f^{-1} = I_{\text{Dom } f}$.
3. $f^{-1} \circ f = I_{\text{Ran } f}$.
4. $\forall x, y \in \text{Dom } f: f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Bijektionen

Sei $f \in X \rightarrow Y$ und Z eine Menge. Dann heißt f

1. **total auf Z** , wenn $Z \subseteq \text{Dom } f$.
2. **partiell auf Z** , wenn f nicht total auf Z ist.
3. **surjektiv für Z** , wenn $Z \subseteq \text{Ran } f$.

Eine Bijektion $X \rightarrow Y$ ist eine injektive Funktion $X \rightarrow Y$, die surjektiv für Y ist. Die Umkehrfunktion einer Bijektion $X \rightarrow Y$ ist eine Bijektion $Y \rightarrow X$. Für jede Menge X ist I_X eine Bijektion $X \rightarrow X$.

Proposition 2.5.5 Für jede Funktion $f \in X \rightarrow Y$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. f Bijektion $X \rightarrow Y$.
2. $f^{-1} \in Y \rightarrow X$.
3. Es existiert eine Funktion $g \in Y \rightarrow X$ mit $f \circ g = I_X$ und $g \circ f = I_Y$.

Proposition 2.5.6 Seien $f \in X \rightarrow Y$ und $g \in Y \rightarrow X$ Funktionen mit $f \circ g = I_X$ und $g \circ f = I_Y$. Dann $f^{-1} = g$ und $g^{-1} = f$. Außerdem ist f eine Bijektion $X \rightarrow Y$ und g eine Bijektion $Y \rightarrow X$.

Isomorphie

Seien X und Y Mengen. Wenn eine Bijektion $X \rightarrow Y$ existiert, bezeichnen wir X und Y als **isomorph** und schreiben $X \cong Y$.

Proposition 2.5.7 Wenn X eine endliche Menge mit $X \cong Y$ ist, dann ist auch Y endlich und $|X| = |Y|$.

Proposition 2.5.8 Wenn X und Y endliche Mengen sind, dann ist $X \rightarrow Y$ eine endliche Menge mit $X \rightarrow Y \cong Y^{|X|}$ und $|X \rightarrow Y| = |Y|^{|X|}$.

Lambda-Notation

Oft ist es bequem, Funktionen mithilfe der sogenannten Lambda-Notation zu beschreiben:

$$\begin{array}{ll} \lambda n \in \mathbb{N}. n & \text{für } \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ \lambda x \in \mathbb{Z}. x^2 & \text{für } \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y = x^2\} \\ \lambda (x, y) \in \mathbb{Z}^2. x + y & \text{für } \{((x, y), z) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge z = x + y\} \end{array}$$

In jeder Zeile wird links und rechts dieselbe Funktion beschrieben. Dabei verwendet die linke Spalte Lambda-Notation und die rechte Spalte die übliche Mengen-Notation. Hier ist ein weiteres Beispiel, das zusätzlich die Konditional-Notation benutzt:

$$\lambda x \in \mathbb{Z}. (\text{if } x \geq 0 \text{ then } x \text{ else } -x) \quad \text{für } \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y = |x|\}$$

Klammersparende Notation

Oft ist es bequem, bei Funktionsanwendungen Klammern einzusparen. Wir schreiben

$$\begin{array}{ll} f \ x & \text{für } f(x) \\ f \ x \ y & \text{für } (f \ x)(y) \end{array}$$

Diese Konvention ist Ihnen bereits aus Standard ML vertraut. Auch bei der Notation $X \rightarrow Y$ (alle totale Funktionen von X nach Y) kann man Klammern einsparen:

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \quad \text{für } X \rightarrow (Y \rightarrow Z)$$

Mehrstellige Funktionen

Jede Funktion hat genau ein Argument. Trotzdem ist es üblich, Funktionen des Typs

$$X \times Y \rightarrow Z$$

als zweistellig zu bezeichnen und zwischen dem ersten und zweiten Argument zu unterscheiden. Da

$$X \times Y \rightarrow Z \cong X \rightarrow Y \rightarrow Z$$

gilt, kann man zweistellige Funktionen auch gemäß des Typs

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z$$

darstellen. Die Darstellung gemäß $X \times Y \rightarrow Z$ bezeichnet man als **kartesisch**, und die Darstellung gemäß $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ als **kaskadiert**. Die kaskadierte Darstellung ist mit der klammersparenden Notation eleganter als die kartesische Darstellung. Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass die Programmiersprache Standard ML beide Darstellungen unterstützt.

Adjunktion von Funktionen

Die **Adjunktion** zweier Funktionen f und g ist wie folgt definiert:

$$f + g \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x \in \text{Dom } f \cup \text{Dom } g. \text{ if } x \in \text{Dom } g \text{ then } g(x) \text{ else } f(x)$$

Statt

$$f + \{x \mapsto y\}$$

schreibt man auch

$$f[x := y]$$

(lies „ f mit x nach y “).

2.6 Notationen für Zahlen

Die Menge aller reellen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}$. Außerdem benutzen wir die folgenden Bezeichnungen:

$\mathbb{B}$	$\stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1\}$	
$\mathbb{N}$	$\stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, 2, \dots\}$	Natürliche Zahlen
$\mathbb{N}^+$	$\stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, 3, \dots\}$	Positive natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_n^+$	$\stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, 3, \dots, n\}$	$(n \geq 1)$
$\mathbb{Z}$	$\stackrel{\text{def}}{=} \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	Ganze Zahlen
$\mathbb{R}^+$	$\stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$	Positive reelle Zahlen

Es gilt $\mathbb{N}_n^+ \subsetneq \mathbb{N}^+ \subsetneq \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{R}$.

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt $x \in X$

- **Minimum** von X genau dann, wenn $\forall y \in X: x \leq y$.
- **Maximum** von X genau dann, wenn $\forall y \in X: y \leq x$.

Das Minimum von X bezeichnen wir mit $\min X$, wenn es existiert. Entsprechend bezeichnen wir das Maximum mit $\max X$, wenn es existiert.

Die Rundungsfunktionen **Floor** $\lfloor _ \rfloor$ und **Ceiling** $\lceil _ \rceil$ sind wie folgt definiert:

$$\begin{array}{ll} \lfloor _ \rfloor \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} & \lceil _ \rceil \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\} & \lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} \mid x \leq z\} \end{array}$$

Die **Modulo-Funktion** ist wie folgt definiert:

$$\begin{array}{l} \text{mod} \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) \rightarrow \mathbb{Z} \\ x \text{ mod } y = x - \lfloor x/y \rfloor y \end{array}$$

Für $y > 0$ gilt: $(x \text{ mod } y) < y$.

Die Standard ML Operation $(x \text{ div } y)$ heißt **ganzzahlige Division** und berechnet $\lfloor x/y \rfloor$ (für $x, y \in \mathbb{Z}$ und $y \neq 0$). Die Operation $(x \text{ mod } y)$ berechnet die Modulo-Funktion.