Studierhinweise zur Kurseinheit 1

I. Wichtige Lehrziele

(1) Kenntnis der in den Abschnitten 1.2 bis 1.5 eingeführten Begriffe und Bezeichnungen des mathematischen „Vokabulars“.
Kontrollaufgaben:
Beweisen Sie selbständig (d.h. ohne in die im Text angegebenen Beweise zu schauen) die folgenden Aussagen:
1.2.24(2), 1.3.5(4), 1.3.25, 1.5.18.

(2) Kenntnis des Prinzips der vollständigen Induktion und des Prinzips vom kleinsten Element.
Nach Durcharbeiten des Abschnittes 1.6 sollten Sie in der Lage sein, einen Induktionsbeweis korrekt zu führen.
Kontrollaufgabe: 1.6.18(1).

II. Eingangsvoraussetzungen

Naturgemäß kann dieser Abschnitt in der ersten Kurseinheit nicht die ihm in den allgemeinen Studierhinweisen zugeschriebene Funktion erfüllen. Wir nutzen die Gelegenheit, Ihnen die Möglichkeit zu geben, das griechische Alphabet zu lernen, falls es Ihnen nicht bekannt sein sollte. Denn leider reichen für den Mathematiker die 2×26 Buchstaben (groß und klein) des lateinischen Alphabets als „Variablen“ beim besten Willen nicht aus! Außerdem liest sich ein mathematischer Text viel besser, wenn man verschiedenartige mathematische Objekte mit verschiedenartigen Buchstabentypen bezeichnet.

DAS GRIECHISCHE ALPHABET

A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ϵ	Epsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Ypsilon
I	ι	Jota	Φ	ϕ, φ	Phi*
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega

* Schreiben Sie in Ihren Aufzeichnungen das kleine Phi stets als φ, auch wenn es im Text bisweilen als ϕ gedruckt ist.

Außerdem verwenden die Mathematiker in handgeschriebenen Texten die alte deutsche (gotische) Schrift. In Maschinenschrift liegt diese leider nicht vor, wir verwenden stattdessen im neuen Text den folgenden, Euler-Fraktur genannten Schrifttyp:

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{I}, \mathfrak{J}, \mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{O}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$$

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}, \mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{o}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}.$$

In vielen Fällen ist es günstiger, für neue „Variablen“ keine neuen Buchstaben einzuführen, sondern denselben Buchstaben zu indizieren oder zu markieren, z.B. im Falle des Buchstaben x

$x_0, x_1, x_2, \ldots$	[Lies: x Null, x Eins, x Zwei, ...],
x'	[x Strich],
$\bar{x}$	[x quer],
$\tilde{x}$	[x Schlange oder x Tilde],
$\hat{x}$	[x Dach oder x Hut],
$\check{x}$	[x Keil],
x''	[x Doppelstrich],
$\underline{x}$	[x unten quer] usw.

1 Naive Mengenlehre

1.1 Einleitung

1.2 Mengen und Mengenoperationen

1.3 Abbildungen

1.4 Relationen

1.5 Äquivalenz- und Ordnungsrelationen

1.6 Vollständige Induktion

1.1 Einleitung

Der Kurs „Lineare Algebra“ umfasst ein Teilgebiet der Mathematik, das der angehende Mathematiker üblicherweise zu Beginn seines Studiums zu erarbeiten hat. Deshalb seien einige vorbereitende Bemerkungen gestattet.

Am Anfang jeder mathematischen Theorie stehen notwendigerweise unbewiesene, als gültig angenommene Aussagen, denn aus dem Nichts kann man nichts Neues herleiten.

Außerdem müssen die Regeln festgelegt sein, nach denen aus im Rahmen der Theorie als wahr erkannten Aussagen weitere wahre Aussagen dieser Theorie hergeleitet werden können.

Im vorliegenden Kurs setzen wir Existenz und wesentliche Eigenschaften der natürlichen, der ganzen, der rationalen und der reellen Zahlen als bekannt voraus und werden nur bei Bedarf Einzelheiten wiederholen oder vertiefen.

Die Regeln unseres Schließens sind die der traditionellen klassischen Logik. Auch diese setzen wir als bekannt voraus. Die folgenden Ausführungen dienen lediglich zur Beschreibung der im Kurs verwendeten Bezeichnungen und sollen dort Missverständnissen vorbeugen, wo der Gebrauch bestimmter Redeweisen in der Mathematik präziser festgelegt ist, als dieses nach unserer Erfahrung bisweilen in der Umgangssprache der Fall ist.

1.1.1 Aussagen

In der klassischen Logik versteht man unter einer **Aussage** jeden (grammatisch korrekten) Satz der Umgangssprache, dem man auf sinnvolle Weise die Eigenschaft, „wahr“, oder „falsch“ zu sein, zusprechen kann. Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch, und welche dieser Eigenschaften auf eine Aussage zutrifft, soll prinzipiell feststehen (ohne dass man im Einzelfall in der Lage sein muss, es effektiv entscheiden zu können).

Aus gegebenen Aussagen können dann neue Aussagen gebildet werden.

1.1.2 Negation

Ist $\mathcal{A}$ eine Aussage, so auch „Nicht $\mathcal{A}$“ , die **Negation** (oder auch: das **Negat**) von $\mathcal{A}$ (in Zeichen: $\neg\mathcal{A}$), die Aussage, die aus $\mathcal{A}$ durch Verneinen von $\mathcal{A}$ entsteht.
$\neg\mathcal{A}$ ist genau dann wahr, wenn $\mathcal{A}$ falsch ist.

1.1.3 Konjunktion

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen, so auch der Satz „$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$“ , die **Konjunktion** von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ (in Zeichen: $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$).
$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ ist genau dann wahr, wenn sowohl $\mathcal{A}$ als auch $\mathcal{B}$ wahr ist.

1.1.4 Disjunktion

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen, so auch der Satz „$\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$“ (in Zeichen: $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$) die **Disjunktion** von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.
$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ wahr ist.
Anders als teilweise umgangssprachlich üblich, wird das „oder“ also insbesondere <u>nicht</u> im Sinne eines „entweder-oder“ gebraucht, d. h. $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ ist auch dann wahr, wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ beide wahr sind.

1.1.5 Implikation

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen, so auch der Satz „Wenn $\mathcal{A}$, so $\mathcal{B}$“, die **Implikation** von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ (im Zeichen: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, oder auch: $\mathcal{B} \Leftarrow \mathcal{A}$). Für $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ sind auch die Redeweisen „Wenn $\mathcal{A}$, dann $\mathcal{B}$“ , „$\mathcal{A}$ impliziert $\mathcal{B}$“ oder „$\mathcal{B}$ folgt aus $\mathcal{A}$“ üblich. In $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ heißt $\mathcal{A}$ die **Prämisse**, $\mathcal{B}$ die **Konklusion** dieser Implikation.
Die Aussage $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist genau dann falsch, wenn $\mathcal{A}$ wahr und $\mathcal{B}$ falsch ist.
Insbesondere ist also jede Implikation wahr, deren Prämisse falsch ist.
$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$ nennt man die zu $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ **inverse Implikation** oder einfach die **Umkehrung** von $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
Sind die Implikationen $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ wahr, so ist auch die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$ wahr. Diese Eigenschaft nennt man **Transitivität** (des logischen Schließens).
Sie hat zur Folge, dass in endlichen **Implikationsketten**

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D} \Rightarrow \ldots$$

— so fasst man abkürzend die Implikationen $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$, $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}$, usw. zusammen — jede Aussage aus jeder in der Kette vor ihr stehenden Aussage folgt, wenn jede einzelne Implikation der Kette wahr ist.

1.1.6 Äquivalenz

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen, so auch der Satz „$\mathcal{A}$ dann und nur dann, wenn $\mathcal{B}$“ , die **Äquivalenz** von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ (in Zeichen: $\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$). Statt „dann und nur dann“ sagt man kürzer auch „genau dann“ .
$\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$ ist genau dann wahr, wenn $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ beide wahr oder beide falsch sind.
Ist die Aussage $\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$ wahr, so sagt man auch „$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ bedingen sich gegenseitig“ oder „$\mathcal{A}$ ist gleichbedeutend mit $\mathcal{B}$ “ .

1.1.7 Junktoren

Die hier aufgeführten logischen Operatoren $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\iff$ nennt man **Junktoren** (iungere = lat. verbinden). Ordnet man einer wahren Aussage den „Wahrheitswert“ W, einer falschen den Wahrheitswert F zu, so lassen sich die obigen Regeln wie folgt tabellarisch zusammenfassen:

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
W	F
F	W

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

Die vorletzte Zeile (exemplarisch) besagt:
Ist $\mathcal{A}$ falsch und $\mathcal{B}$ wahr, so ist $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ falsch, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ wahr, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ wahr, $\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$ falsch.

Diese Tabelle verdeutlicht auch eine für den Gebrauch der Junktoren in der Mathematik wesentliche Eigenschaft: Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage ist durch die Wahrheitswerte der Teilaussagen vollständig bestimmt. Der Mathematiker hat z. B. keine Bedenken, die Aussage „3 ist eine Primzahl, und Cäsar war ein Römer“ als wahr anzuerkennen, auch wenn kein inhaltlicher Bezug zwischen beiden (wahren) Teilaussagen besteht. Für die Umgangssprache gilt das nicht: Beispiele wie „Hans wurde krank, und der Arzt gab Hans eine Medizin “ bzw. „Der Arzt gab Hans eine Medizin, und Hans wurde krank “ mögen dieses verdeutlichen.

1.1.8 Bemerkung

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ seien Aussagen. Dann gilt:

(1) Die Aussage $\neg(\neg\mathcal{A})$ ist gleichbedeutend mit der Aussage $\mathcal{A}$.

(2) $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ist gleichbedeutend mit $(\neg\mathcal{B}) \Rightarrow (\neg\mathcal{A})$.

(3) $\mathcal{A} \iff \mathcal{B}$ ist gleichbedeutend mit $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$.

(4) $\neg(A \vee \mathcal{B})$ ist gleichbedeutend mit $(\neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B})$.

(5) $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ ist gleichbedeutend mit $(\neg\mathcal{A}) \vee (\neg\mathcal{B})$.

(6) $\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ ist gleichbedeutend mit $\mathcal{A} \wedge (\neg\mathcal{B})$.

Von solchen Äquivalenzen wird in Beweisen häufig Gebrauch gemacht. Sollten sie Ihnen nicht vertraut sein, prüfen Sie anhand der Tabelle 1.1.7, dass jeweils eine Aussage der Äquivalenz genau dann wahr ist, wenn dieses für die andere gilt.

1.1.9 Definitionsgleichungen

Das Äquivalenzzeichen $\iff$ wird in Kombination mit einem Doppelpunkt verwendet, wenn eine Aussage durch eine andere definiert wird. $\mathcal{A} :\iff \mathcal{B}$ (bzw. $\mathcal{B} \iff: \mathcal{A}$) wird gelesen als „$\mathcal{A}$ ist per Definition gleichbedeutend mit $\mathcal{B}$“ . Als Beispiel diene die Definition des Begriffes Primzahl:

$$p \quad \text{ist eine Primzahl} \quad :\iff \quad p \quad \text{ist eine natürliche Zahl} \quad \neq 1, \\ \text{die außer} \quad 1 \quad \text{und} \quad p \quad \text{keine natürliche} \\ \text{Zahl als Teiler hat.}$$

Analog wird der Doppelpunkt in Definitionsgleichungen verwendet.
$a := b$ (bzw. $b =: a$) wird gelesen als „a ist per Definition gleich b “ (oder kurz: „a definiert gleich b “). Der Doppelpunkt steht stets auf der Seite des zu definierenden Objekts.

1.1.10 Quantoren

In der Mathematik wird nicht nur untersucht, ob eine Eigenschaft auf ein bestimmtes Ding zutrifft oder nicht. Oft wird auch gefragt, wieviele (lat: quanti) Dinge eine gegebene Eigenschaft besitzen. Operatoren, die solche Zusammenhänge beschreiben, nennt man in der mathematischen Logik **Quantoren**. Für die am häufigsten vorkommenden Quantoren hat man wiederum Abkürzungen:
Für den **Existenzquantor** „Es gibt ein“ das Zeichen $\exists$, für den **Allquantor** „Für alle“ das Zeichen $\forall$.
„Es gibt ein“ wird in der Mathematik stets im Sinne von „Es gibt mindestens ein“ gebraucht.
Allaussagen können auch vorliegen, ohne dass die Worte „für alle“ (bzw. „für jede“) explizit verwendet werden. Z. B. bedeutet die zu Beginn des vorigen Abschnitts verwendete Formulierung „$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ seien Aussagen: Dann gilt … “ dem mathematischen Sprachgebrauch entsprechend nichts anderes als „Für alle Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt … “ .

Sorgfalt ist geboten bei der Verneinung von Existenz- bzw. Allaussagen.
Die Negation der Aussage „Es gibt ein Ding x, auf das die Eigenschaft E zutrifft“ ist äquivalent zu dem Satz „Für alle Dinge x gilt: Die Eigenschaft E trifft auf x nicht zu“ .
Zum Negat des Satzes „Für alle Dinge x gilt: x hat die Eigenschaft E“ ist die Aussage „Es gibt ein Ding x, das die Eigenschaft E nicht hat“ äquivalent.

1.2 Mengen und Mengenoperationen

1.2.1 Mengen

Seit fast hundert Jahren hat sich die Sprache der Mengenlehre als zur Beschreibung mathematischer Sachverhalte geeignete Fachsprache bewährt. Als Begründer der Mengenlehre gilt der deutsche Mathematiker Georg Cantor (1845-1918). Cantors Definition aus den Jahren 1895/97

> *Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen*

erwies sich allerdings, wie der englische Mathematiker und Philosoph Sir Bertrand Russell (1872-1970) im Jahr 1901 nachwies, als nicht widerspruchsfrei („Russellsche Antinomie“). Es hat daher in der Folgezeit mehrere Ansätze gegeben, mit Hilfe geeigneter Axiomensysteme Modelle einer Mengenlehre zu erstellen, die zur Darstellung weiter Bereiche der Mathematik geeignet sind und in denen sich die Russellsche Antinomie oder andere Widersprüche bisher nicht herleiten ließen.
In diesem Kurs wollen wir auf diese „axiomatische Mengenlehre“ nicht weiter eingehen, denn für unsere Zwecke ist die „naive“ Vorstellung, bestimmte Dinge zu einem Ganzen zusammenfassen zu können, ausreichend. Man geht davon aus, dass prinzipiell feststeht, ob ein Ding x zu einer Menge M gehört oder nicht. Gehört x zur Menge M, so verwendet man hierfür das Symbol

$$x \in M$$

und sagt (nach Cantor): x **ist Element von** M. Ist x nicht Element von M, so kürzt man dieses durch

$$x \notin M$$

ab.
Für $x \in M$ sind im mathematischen Alltag auch Redeweisen wie „x ist aus M“ , „M enthält x“, „x gehört zu M“ , „x liegt in M“ oder sprachlich Äquivalentes gebräuchlich.

1.2.2 Gleichheit von Mengen

Da jede Menge die „Zusammenfassung“ ihrer Elemente ist, ist sie durch diese eindeutig bestimmt:
Zwei Mengen sind dann und nur dann gleich, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten.
Hieraus resultiert eine der allgemein gebräuchlichen Möglichkeiten zur Beschreibung von Mengen: Man gibt — in geschweifte Klammern gesetzt und durch Kommata getrennt— die Elemente der vorgegebenen Menge explizit an.
Z. B. ist $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ die Menge, die aus den Elementen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 besteht.
Hierbei wird weder verlangt, dass die Elemente in einer bestimmten Reihenfolge angegeben werden, noch dass jedes Element nur einmal aufgeführt ist.
Z. B. sind $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 2, 1, 3\}$ und $\{3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1\}$ Darstellungen derselben Menge.
Diese aufzählende Schreibweise wird bisweilen auch in Fällen verwendet, in denen eine Menge unendlich viele Elemente enthält. Man schreibt

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$$

(lies: „Menge der x_1, x_2, x_3 usw. “). Es muss dann aber aus dem Zusammenhang klar sein, was mit dem „usw. “ gemeint ist.

Die zweite Möglichkeit, Mengen zu beschreiben, besteht in der Angabe der Eigenschaft, welche die Elemente der gegebenen Menge charakterisieren. Ist E eine Eigenschaft, so wird mit

$$\{x \mid E(x)\}$$

(lies: „Menge der x mit der Eigenschaft E “) die Menge derjenigen Objekte bezeichnet, welche die Eigenschaft E haben.
Z. B. stimmt die Menge $\{x \mid x \text{ ist eine Primzahl und } x \text{ ist gerade }\}$ mit der Menge $\{2\}$ überein.

1.2.3 Beispiele

Zur Illustration bzw. zur Festlegung der in diesem Kurs verwendeten Bezeichnungen seien hier die folgenden Ihnen bekannten Mengen angegeben:

(1) $\mathbb{N} := \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl }\} = \{1, 2, 3 \ldots\}$ bezeichnet die Menge der **natürlichen Zahlen**.
Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass für diesen Kurs die Konvention gilt, die natürlichen Zahlen mit der 1 beginnen zu lassen.
$\mathbb{N}^0 := \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ oder } x = 0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (lies: N oben Null) bezeichnet die Menge, die aus der Null und den natürlichen Zahlen besteht.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{N}_n$ die natürlichen Zahlen, die kleiner oder gleich n sind: $\mathbb{N}_n := \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } x \leq n\} = \{1, 2, 3, \ldots n\}$. Ferner sei $\mathbb{N}_n^0 := \{x \mid x \in \mathbb{N}_n \text{ oder } x = 0\}$.

(2) $\mathbb{Z} := \{x \mid x \text{ ist eine ganze Zahl}\} = \{0, +1, -1, +2, -2, \ldots\}$ ist die Menge der **ganzen Zahlen**.

(3) $\mathbb{Q} := \{x \mid x \text{ ist eine rationale Zahl }\} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0\}$ ist die Menge der **rationalen Zahlen**.

(4) $\mathbb{R} := \{x \mid x \text{ ist eine reelle Zahl }\}$ die Menge der **reellen Zahlen**.

Die angegebenen Symbole $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind allgemein gebräuchlich (gelesen werden sie wie die zugrundeliegenden Buchstaben N, Z, Q, R). □

In der mathematischen Praxis hat es sich als zweckmäßig erwiesen, die Existenz einer Menge anzunehmen, die kein Element enthält:

1.2.4 Definition

$$\emptyset := \{x \mid x \neq x\}$$

heißt die **leere Menge**.
Da es kein Objekt x gibt, das die Eigenschaft $x \neq x$ besitzt, enthält $\emptyset$ in der Tat kein Element.
Eine Menge M heißt **nichtleer** genau dann, wenn $M \neq \emptyset$ ist. □

Nach der Gleichheit ist eine der grundlegenden Beziehungen, die zwischen Mengen bestehen kann, die des Enthaltenseins:

1.2.5 Definition

M und N seien Mengen.
M heißt **Teilmenge von** N (in Zeichen: $M \subset N$) genau dann, wenn für alle x gilt:

$$x \in M \Rightarrow x \in N.$$

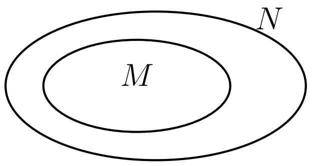
Für $M \subset N$ sind auch die Redeweisen „M ist in N enthalten“, „N umfasst M“ oder „N ist Obermenge von M“ gebräuchlich. Statt $M \subset N$ schreibt man auch $N \supset M$.
Die durch das Enthaltensein beschriebene Beziehung zwischen Mengen nennt man **Inklusion**, das Zeichen $\subset$ das **Inklusionssymbol**.
M heißt **echte Teilmenge von** N genau dann, wenn $M \subset N$ und $M \neq N$ gilt.
Ist M nicht Teilmenge von N, so wird dieses auch durch $M \not\subset N$ (bzw. $N \not\supset M$) abgekürzt.

1.2.6 Bemerkung

(1) Machen Sie sich bitte klar, dass für Mengen M, N die Aussage $M \not\subset N$ das Negat von $M \subset N$ ist. $M \not\subset N$ bedeutet also: Es gibt ein $x \in M$ mit $x \notin N$. Im allgemeinen folgt somit aus $M \not\subset N$ nicht notwendig $N \subset M$!
(2) Hat man mehrere Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ($n \in \mathbb{N}$) gegeben, von denen jeweils eine in der nächsten enthalten ist (d. h. es gilt $M_i \subset M_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n-1$), so schreibt man das häufig in Form einer **Inklusionskette**: $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n$.

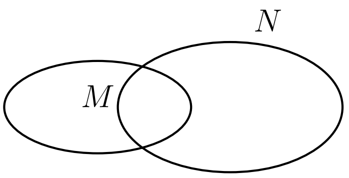
1.2.7 Bemerkung

An dieser Stelle sei auf eine in der Mathematik bisweilen verwendete, sehr suggestive Methode hingewiesen, Beziehungen zwischen Mengen durch nach dem englischen Logiker und Philosophen John Venn (1834-1923) benannte **Venn-Diagramme** zu illustrieren:
Man denkt sich die Elemente einer Menge als Punkte der Ebene im Innern einer einfach geschlossenen Kurve realisiert. So hat man etwa in



$M \subset N$

ein Beispiel für die Inklusion $M \subset N$, und in



$M \not\subset N$

ein Beispiel für die Beziehung $M \not\subset N$. Man beachte aber: Venn-Diagramme sind keine Beweise, lediglich Illustrationen für Plausibilitätsbetrachtungen. □

Für die Inklusion gelten die folgenden Rechenregeln:

1.2.8 Satz

L, M, N seien Mengen. Dann gilt:

(1) $\emptyset \subset M$.

(2) $M \subset M$.

(3) *Gilt* $M \subset N$ *und* $N \subset M$, *so ist* $M = N$.

(4) *Gilt* $M \subset N$ *und* $N \subset L$, *so gilt* $M \subset L$. („Transitivität der Inklusion“)

Beweis:
(1): Nach Definition 1.2.5 ist für jedes x die Implikation $x \in \emptyset \Rightarrow x \in M$ zu zeigen. Nun ist für jedes x die Aussage $x \in \emptyset$ falsch, da $\emptyset$ kein Element enthält. Für jedes x ist also obige Implikation wahr, weil die Prämisse falsch ist 1.1.5.
(2): Die Implikation $(x \in M \Rightarrow x \in M)$ ist für jedes x richtig.
(3): Für alle x gilt: $x \in M \Rightarrow x \in N$ (wegen $M \subset N$) und $x \in N \Rightarrow x \in M$ (wegen $N \subset M$). Für alle x gilt also $x \in M \iff x \in N$. Nach 1.2.2 gilt damit $M = N$.
(4): Wenn für alle x gilt $(x \in M \Rightarrow x \in N)$ und $(x \in N \Rightarrow x \in L)$ dann gilt für alle x: $(x \in M \Rightarrow x \in L)$. Nach Definition 1.2.5 war das zu zeigen.

Das in 1.2.8(3) beschriebene Kriterium wird in der Praxis fast immer angewendet, wenn die Gleichheit zweier Mengen nachzuweisen ist. Wir stellen es deshalb besonders heraus als

1.2.9 Folgerung

M und N seien Mengen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $M = N$.
(ii) $M \subset N$ *und* $N \subset M$.

Beweis:
(i)$\Rightarrow$ (ii): Ist $M = N$, so gilt $M \subset N$ und $N \subset M$ nach 1.2.8 (2).
(ii) $\Rightarrow$ (i): 1.2.8 (3).

1.2.10 Definition

M sei eine Menge. Dann heißt

$$\mathfrak{P}(M) := \{N \,|\, N \subset M\}$$

die **Potenzmenge** von M.

Wir überlassen es Ihnen, die folgenden Eigenschaften von Potenzmengen zu beweisen:

1.2.11 Aufgabe

Zeigen Sie:

(1) Für jede Menge M ist $\mathfrak{P}(M) \neq \emptyset$.

(2) Sind M und N Mengen, so gilt: $N \subset M \iff \mathfrak{P}(N) \subset \mathfrak{P}(M)$. [$\to$**L**]

In der Mathematik fasst man häufig die Elemente unterschiedlicher Mengen zu einer neuen Menge zusammen bzw. man betrachtet die Menge der Elemente, die verschiedenen Mengen gemeinsam sind. Dafür hat man spezielle Bezeichnungen:

1.2.12 Definition

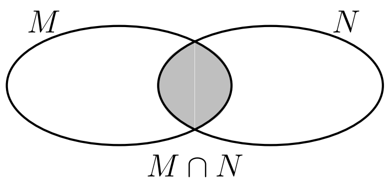
M und N seien Mengen. Dann heißt

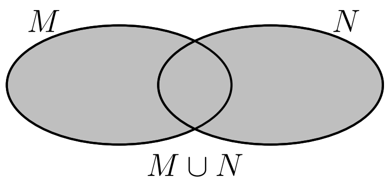
$$M \cup N := \{x \mid x \in M \quad \text{oder} \quad x \in N\}$$

die **Vereinigung** von M und N (lies: „M vereinigt N “).

$$M \cap N := \{x \mid x \in M \quad \text{und} \quad x \in N\}$$

heißt der **Durchschnitt** von M und N (lies: „M geschnitten mit N“).
M und N heißen **disjunkt** (oder **elementfremd**) genau dann, wenn $M \cap N = \emptyset$ ist.





Erste einfache Eigenschaften von Durchschnitt und Vereinigung fassen wir zusammen in dem

1.2.13 Satz

L, M, N seien Mengen. Dann gilt

(1) $M \cup N = N \cup M$.
$M \cap N = N \cap M$. („Kommutativität“)

(2) $M \cup (N \cup L) = (M \cup N) \cup L$.
$M \cap (N \cap L) = (M \cap N) \cap L$. („Assoziativität“)

(3) $M \cap (N \cup L) = (M \cap N) \cup (M \cap L)$.
$M \cup (N \cap L) = (M \cup N) \cap (M \cup L)$. („Distributivität“)

Beweis:
(1): Für alle x gilt:
$x \in M \cup N \iff x \in M$ oder $x \in N \iff x \in N$ oder $x \in M \iff x \in N \cup M$.
Folglich ist $M \cup N = N \cup M$ [1.2.2].
Für alle x gilt:

$x \in M \cap N \iff x \in M$ und $x \in N \iff x \in N$ und $x \in M \iff x \in N \cap M$.
Folglich gilt $M \cap N = N \cap M$.
(2), (3): Die Beweise dieser Aussagen überlassen wir Ihnen zur Übung. [$\to$**L**]

Zwischen Inklusion und Durchschnitt bzw. Vereinigung besteht der folgende Zusammenhang:

1.2.14 Satz

L, M, N seien Mengen. Dann gilt:

(1) $M \cap N \subset M \subset M \cup N$.

(2) $(L \subset M$ *und* $L \subset N) \iff L \subset M \cap N$.

(3) $(M \subset L$ *und* $N \subset L) \iff M \cup N \subset L$.

Beweis:
(1): Für alle x gilt:

$$\begin{aligned} x \in M \cap N &\iff x \in M \quad \text{und} \quad x \in N \\ &\implies x \in M \\ &\implies x \in M \quad \text{oder} \quad x \in N \\ &\iff x \in M \cup N. \end{aligned}$$

(2)„$\Rightarrow$“: Zu zeigen ist, dass unter den Vorraussetzungen $L \subset M$ und $L \subset N$ die Inklusion $L \subset M \cap N$ gilt. Sei also $x \in L$. Wegen $L \subset M$ gilt dann $x \in M$ und wegen $L \subset N$ gilt dann $x \in N$. Für alle x gilt also: $(x \in L \Rightarrow x \in M$ und $x \in N)$, d. h. $x \in L \Rightarrow x \in M \cap N$ [1.2.8], mithin gilt $L \subset M \cap N$.
„$\Leftarrow$“: Nach Voraussetzung gilt $L \subset M \cap N$. Nach Teil (1) gilt $M \cap N \subset M$. Aufgrund der Transitivität der Inklusion [1.2.8 (4)] gilt dann $L \subset M$.
Ebenso gilt nach (1) die Inklusion $M \cap N \subset N$.
[Beachten Sie: Die Aussage (1) gilt *für alle* Mengen M und N; ersetzt man also in (1) das Paar M, N durch das Paar N, M, so steht dort

$$N \cap M \subset N \subset N \cup M$$

und zusammen mit der Kommutativität von Durchschnitt und Vereinigung [1.2.13 (1)] erhält man $M \cap N \subset N \subset M \cup N$.]
Mit der Voraussetzung $L \subset M \cap N$ folgt wiederum aufgrund der Transitivität die Inklusion $L \subset N$.
Insgesamt folgen aus der Inklusion $L \subset M \cap N$ die Inklusionen $L \subset M$ und $L \subset N$.
(3) „$\Rightarrow$“: Für alle x gilt:
$x \in M \cup N \iff x \in M$ oder $x \in N$ [1.2.12]. Gilt $x \in M$, so folgt $x \in L$ wegen der Voraussetzung $M \subset L$. Gilt $x \in N$, so folgt $x \in L$ wegen $N \subset L$. Für alle x gilt also die Implikation $x \in M \cup N \Rightarrow x \in L$. D. h. es gilt $M \cup N \subset L$.
„$\Leftarrow$“: Nach Teil (1) gilt $M \subset M \cup N$, nach Voraussetzung $M \cup N \subset L$, also gilt $M \subset L$.
Ebenso gilt nach (1) die Inklusion $N \subset M \cup N$. Mit $M \cup N \subset L$ folgt hieraus $N \subset L$.
Aus $M \cup N \subset L$ folgen also die Inklusionen $M \subset L$ und $N \subset L$.

1.2.15 Bemerkung

Nach Satz 1.2.14(1) ist also für zwei Mengen M und N der Durchschnitt $M \cap N$ Teilmenge von M und N (vgl. die Bemerkung im Beweis zu (2)), und die Implikation „$\Rightarrow$“ in (2) zeigt, dass $M \cap N$ die größte Menge mit dieser Eigenschaft ist, denn jede gemeinsame Teilmenge von M und N ist auch Teilmenge von $M \cap N$.
Analog kann man nach (1) und (3) $M \cup N$ als die kleinste Menge auffassen, die M und N umfasst. □

Die Aussagen des folgenden Satzes lassen sich mühelos ad hoc (d. h. in direktem Rückgriff auf die Definitionen) beweisen. In den hier angegebenen Beweisen werden bewusst die Kriterien des vorherigen Satzes verwendet.

1.2.16 Satz

M und N seien Mengen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $N \subset M$.

(ii) $M \cap N = N$.

(iii) $M \cup N = M$.

Beweis:
(i) $\Rightarrow$ (ii): Nach 1.2.14(1) gilt $M \cap N \subset N$. Aus $N \subset N$ [1.2.8(2)] und $N \subset M$ [nach Voraussetzung] folgt mit 1.2.14(2) die Inklusion $N \subset M \cap N$. Insgesamt gilt also $M \cap N = N$ [vgl. 1.2.9].
(ii) $\Rightarrow$ (iii): $M \subset M \cup N$ gilt nach 1.2.14(1).
Die Gültigkeit der Inklusion $M \cup N \subset M$ folgt aus 1.2.14(3), denn es gilt $M \subset M$ und, wegen $M \cap N \subset M$ und der Voraussetzung $N = M \cap N$, auch $N \subset M$. Insgesamt gilt also $M \cup N = M$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Aus $M \cup N = M$ folgt speziell $M \cup N \subset M$. Mit der nach 1.2.14(1) gültigen Inklusion $N \subset M \cup N$ folgt aufgrund der Transitivität die Behauptung: $N \subset M$.
Man schließt nun transitiv aus der Implikationskette

$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)},$$

dass jede der Aussagen (i), (ii), (iii) aus jeder der anderen folgt, dass also je zwei äquivalent sind. (Dieses Verfahren wird bisweilen als **Ringschluss** bezeichnet, da man die (geschlossene) Kette durch einen Ring symbolisieren kann:)

$$\begin{tikzcd} & \text{(i)} \arrow[dl] & \\ \text{(ii)} \arrow[rr] & & \text{(iii)} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

1.2.17 Folgerung

M und N seien Mengen. Dann gilt:

(1) $M \cap M = M = M \cup M$.

(2) $M \cap \emptyset = \emptyset$ *und* $M \cup \emptyset = M$.

(3) $M \cap (N \cup M) = M = M \cup (N \cap M)$.

Beweis:
Den Beweis dieser Aussagen überlassen wir Ihnen zur Übung. [→**L**]

In 1.2.12 wurden Durchschnitt und Vereinigung von je zwei Mengen definiert. Da man aber auch entsprechende Operationen für größere Mengensysteme zu betrachten hat, benötigt man allgemeinere Bezeichnungen:

1.2.18 Definition

I sei eine nichtleere Menge, und für jedes $i \in I$ sei eine Menge M_i gegeben. Dann heißt

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \,|\quad \text{Für alle} \quad i \in I \quad \text{gilt} \quad x \in M_i\}$$

(lies: Durchschnitt der M_i, i aus I)
der (**verallgemeinerte**) **Durchschnitt** der M_i über alle $i \in I$.

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x \,|\quad \text{Es gibt ein} \quad i \in I \quad \text{mit} \quad x \in M_i\}$$

(lies: Vereinigung der M_i, i aus I)
heißt die **(verallgemeinerte) Vereinigung** der M_i über alle $i \in I$.

[Anm.: Im Text erscheinen diese Symbole auch in der Form $\bigcap_{i \in I} M_i, \bigcup_{i \in I} M_i$.]

Man nennt eine Vereinigung $\bigcup_{i \in I} M_i$ **disjunkt**, wenn die M_i paarweise disjunkt sind (d. h. wenn für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ $M_i \cap M_j = \emptyset$ ist).

1.2.19 Bemerkungen

(1) I heißt die Indexmenge, i der (Lauf-) Index dieser Symbole. Welchen Buchstaben man für den Index wählt, ist ohne Belang. Da „Für alle $i \in I$ gilt $x \in M_i$ “ dasselbe ist wie „Für alle $z \in I$ gilt $x \in M_z$ “ hat man $\bigcap_{i \in I} M_i = \bigcap_{z \in I} M_z$.
Analoges gilt für $\bigcup$.

(2) Die Bezeichnungen aus 1.2.12 lassen sich hier wie folgt einordnen: Sind M und N Mengen, so wählt man $I = \{1, 2\}$, $M_1 := M$ und $M_2 := N$ und erhält

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} M_i &= \{x \,|\quad \text{Für alle} \quad i \in \{1,2\} \quad \text{gilt} \quad x \in M_i\} \\ &= \{x \,|\, x \in M_1 \quad \text{und} \quad x \in M_2\} = M \cap N \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} M_i &= \{x \,|\quad \text{Es gibt ein} \quad i \in \{1,2\} \quad \text{mit} \quad x \in M_i\} \\ &= \{x \,|\, x \in M_1 \quad \text{oder} \quad x \in M_2\} = M \cup N \end{aligned}$$

(3) In Spezialfällen sind bisweilen besondere Bezeichnungen üblich. So schreibt man im Fall der Indexmenge $I = \mathbb{N}_n$ $(n \in \mathbb{N})$

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i \quad \text{statt} \quad \bigcap_{i\in\mathbb{N}_n} M_i \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^{n} M_i \quad \text{statt} \quad \bigcup_{i\in\mathbb{N}_n} M_i$$

(lies: Durchschnitt (bzw. Vereinigung) der M_i von 1 bis n). □

Bildet man den Durchschnitt (bzw. die Vereinigung) über die Teilmengen einer vorgegebenen Menge, so wählt man häufig eine weitere Abkürzung: Ist M eine Menge und $\mathfrak{N}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{P}(M)$, so schreibt man

$$\bigcap \mathfrak{N} \quad \text{anstelle von} \quad \bigcap_{N\in\mathfrak{N}} N \quad \text{sowie} \quad \bigcup \mathfrak{N} \quad \text{anstelle von} \quad \bigcup_{N\in\mathfrak{N}} N.$$

Nach Definition 1.2.18 gilt also

$$\bigcap \mathfrak{N} = \{x \mid \quad \text{Für alle} \quad N \in \mathfrak{N} \quad \text{gilt} \quad x \in N\}$$

bzw.

$$\bigcup \mathfrak{N} = \{x \mid \quad \text{Es gibt ein} \quad N \in \mathfrak{N} \quad \text{mit} \quad x \in N\}.$$

□

Für die verallgemeinerten Durchschnitte und Vereinigungen gelten zunächst folgende Regeln:

1.2.20 Satz

Es sei I eine nichtleere Menge, und für jedes $i \in I$ sei eine Menge M_i gegeben. J und K seien nichtleere Teilmengen von I. Dann gilt:

(1) *Für jedes $k \in I$ gilt*

$$\bigcap_{i\in I} M_i \subset M_k \quad \textit{und} \quad M_k \subset \bigcup_{i\in I} M_i.$$

(2)

$$\bigcap_{i\in I} M_i \subset \bigcap_{i\in K} M_i \quad \textit{und} \quad \bigcup_{i\in K} M_i \subset \bigcup_{i\in I} M_i.$$

(3)

$$\left(\bigcup_{i\in J} M_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in K} M_i\right) = \bigcup_{i\in J\cup K} M_i.$$

$$\left(\bigcap_{i\in J} M_i\right) \cap \left(\bigcap_{i\in K} M_i\right) = \bigcap_{i\in J\cup K} M_i.$$

Beweis:
<u>(1)</u>: Ist ein Spezialfall von (2): Man wähle dort $K = \{k\}$.
<u>(2)</u>:

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i\in I} M_i \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{Für alle} \quad i \in I \quad \text{gilt} \quad x \in M_i \\ &\Longrightarrow \quad \text{Für alle} \quad i \in K \quad \text{gilt} \quad x \in M_i \text{ (da } K \text{ Teilmenge von } I \text{ist).} \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in \bigcap_{i\in K} M_i. \end{aligned}$$

Damit gilt die erste Inklusion. Den Beweis der zweiten überlassen wir Ihnen zur Übung. [→**L**]

<u>(3)</u>: $x \in \left(\bigcup_{i\in J} M_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in K} M_i\right) \iff x \in \bigcup_{i\in J} M_i$ oder $x \in \bigcup_{i\in K} M_i$

$\iff$ Es gibt ein $i \in J$ mit $x \in M_i$ oder es gibt ein $i \in K$ mit $x \in M_i$

$\iff$ Es gibt ein $i \in J \cup K$ mit $x \in M_i$

$\iff x \in \bigcup_{i\in J\cup K} M_i$.

Also gilt die erste Identität. Den Beweis der zweiten überlassen wir Ihnen zur Übung. [→**L**]

Das Analogon zu den Aussagen (2) und (3) aus Satz 1.2.14 lautet:

1.2.21 Satz

I sei eine nichtleere Menge, $L, M_i (i \in I)$ seien Mengen, dann gelten folgende Äquivalenzen:

(1) $L \subset \bigcap_{i\in I} M_i \iff$ *Für alle $i \in I$ gilt $L \subset M_i$.*

(2) $\bigcup_{i\in I} M_i \subset L \iff$ *Für alle $i \in I$ gilt $M_i \subset L$.*

Beweis:
<u>(1) „⇒“ :</u> Für jedes $k \in I$ gilt $\bigcap_{i\in I} M_i \subset M_k$ [1.2.20 (1)]. Nach Voraussetzung gilt $L \subset \bigcap_{i\in I} M_i$. Aufgrund der Transitivität gilt $L \subset M_k$ für jedes $k \in I$.
<u>„⇐“</u> : $x \in L \implies$ Für alle $i \in I$ gilt $x \in M_i$ [wegen $L \subset M_i$ $(i \in I)$].
$\iff x \in \bigcap_{i\in I} M_i$.
Also gilt $L \subset \bigcap_{i\in I} M_i$.
<u>(2)</u>: Den Beweis dieser Aussage überlassen wir Ihnen zur Übung. [→**L**]

Die Distributivgesetze (1.2.13(3)) lauten in allgemeiner Form:

1.2.22 Satz

I sei eine nichtleere Menge, M, N_i $(i \in I)$ seien Mengen. Dann gilt:

(1) $M \cap (\bigcup_{i\in I} N_i) = \bigcup_{i\in I}(M \cap N_i)$.

(2) $M \cup \left(\bigcap_{i\in I} N_i\right) = \bigcap_{i\in I} (M \cup N_i)$.

Beweis:
Die Beweise überlassen wir Ihnen zur Übung. [→**L**]

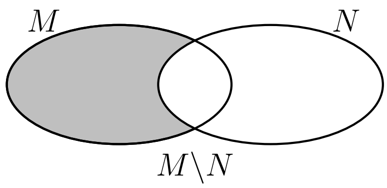
Eine weitere wichtige mengentheoretische Operation ist die Bildung der Differenz von Mengen:

1.2.23 Definition

M und N seien Mengen. Dann heißt

$$M\backslash N := \{x \,|\, x \in M \quad \text{und} \quad x \notin N\}$$

(lies: „M ohne N“) die **Differenz** von M und N.
Beachten Sie bitte, dass nicht verausgesetzt wird, dass N Teilmenge von M ist.
Gilt $N \subset M$, so nennt man $M\backslash N$ auch das (**mengentheoretische**) **Komplement** von N in M.



Erste einfache Eigenschaften fassen wir zusammen in dem

1.2.24 Satz

M und N seien Mengen. Dann gilt:

(1) $M\backslash N \subset M$.

(2) $(M\backslash N) \cap N = \emptyset$ *und* $(M\backslash N) \cup N = M \cup N$.

(3) $M\backslash N = M \iff M \cap N = \emptyset$.

(4) $M\backslash N = \emptyset \iff M \subset N$.

Beweis:
(1): Es gilt für alle x die Implikation $(x \in M \quad \text{und} \quad x \notin N) \Longrightarrow x \in M$.
(2): Wäre $(M\backslash N)\cap N \neq \emptyset$, so gäbe es ein $x \in (M\backslash N)\cap N$. Dieses x erfüllte die Bedingung $x \notin N$ und $x \in N$. Widerspruch!
Die Inklusion $(M\backslash N) \cup N \subset M \cup N$ folgt aus $M\backslash N \subset M$.
Sei umgekehrt $x \in M \cup N$. Wir unterscheiden die Fälle $x \in N$ und $x \notin N$. Im Fall $x \in N$ gilt wegen $N \subset (M\backslash N) \cup N$ auch $x \in (M\backslash N) \cup N$. Im Fall $x \notin N$ muss wegen $x \in M \cup N$ dann $x \in M$ gelten, also gilt in diesem Fall $x \in M\backslash N$ und damit wiederum $x \in (M\backslash N) \cup N$.
Für alle x gilt also auch die Implikation $x \in M \cup N \Rightarrow x \in (M\backslash N) \cup N$.
(3): Die Implikation „$\Rightarrow$“ folgt aus der ersten Gleichung in (2).
„$\Leftarrow$ “: Sei $x \in M$. Wegen $M \cap N = \emptyset$ gilt dann $x \notin N$. Also gilt die Inklusion $M \subset M\backslash N$. Die Gleichheit folgt dann aus (1).
(4): $M\backslash N = \emptyset \iff$ Es gibt kein x mit $x \in M$ und $x \notin N$
$\iff$ Für alle x gilt: $x \in M \Rightarrow x \in N$
$\iff M \subset N$.

□

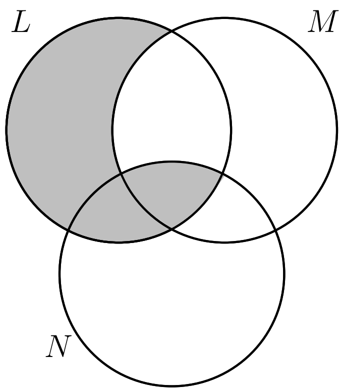
Bei der Bildung mehrfacher Differenzen ist sorgfältig auf die Klammerung zu achten. Das erkennt man z. B. an den Identitäten in der

1.2.25 Aufgabe

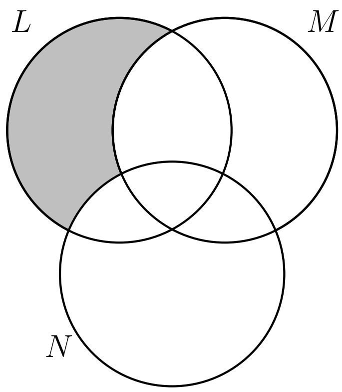
L, M, N seien Mengen.
Beweisen Sie:

(1) $(L\backslash M)\backslash N = L\backslash(M \cup N)$.

(2) $L\backslash(M\backslash N) = (L\backslash M) \cup (L \cap N)$. [→ **L**]



$L\backslash(M\backslash N)$



$(L\backslash M)\backslash N$

Zur Verträglichkeit der Differenzbildung mit den bisher bekannten Operationen Inklusion, Vereinigung und Durchschnitt gilt der

1.2.26 Satz

L, M, N seien Mengen. Dann gilt:

(1) $M \subset N \Rightarrow M\backslash L \subset N\backslash L.$
$M \subset N \Rightarrow L\backslash N \subset L\backslash M.$

(2) $L\backslash(M \cap N) = (L\backslash M) \cup (L\backslash N).$
$L\backslash(M \cup N) = (L\backslash M) \cap (L\backslash N).$

(3) $(L \cap M)\backslash N = (L\backslash N) \cap (M\backslash N).$
$(L \cup M)\backslash N = (L\backslash N) \cup (M\backslash N).$

Beweis:
Die Beweise dieser Aussagen überlassen wir Ihnen zur Übung. Machen Sie sich bitte auch jeweils an einem Beispiel klar, dass in (1) die umgekehrten Implikationen nicht allgemein gültig sind. [→**L**]

In der Spezialisierung, dass M und N Teilmengen von L sind, sind die Aussagen 1.2.26(2) unter dem Namen **de Morgan'sche Regeln** in der Literatur bekannt (A. de Morgan, 1806-1871).

Die Verallgemeinerungen für beliebige Durchschnitte bzw. Vereinigungen lassen sich mühelos beweisen:

1.2.27 Aufgabe

I sei eine nichtleere Menge, M, N_i $(i \in I)$ seien Mengen. Beweisen Sie:

(1) $M\backslash \left(\bigcap_{i\in I} N_i\right) = \bigcup_{i\in I}(M\backslash N_i).$

(2) $M\backslash \left(\bigcup_{i\in I} N_i\right) = \bigcap_{i\in I}(M\backslash N_i).$ [→**L**]

1.3 Abbildungen

Von zentraler Bedeutung zur Beschreibung struktureller Zusammenhänge ist in der Mathematik der Begriff der Abbildung.

1.3.1 Definition

Eine Abbildung besteht aus drei Daten:

- einer Menge, die der **Definitionsbereich** (auch: **Argumentbereich** oder **Urbildbereich**) der Abbildung heißt,
- einer Menge, die der **Wertebereich** (oder: **Bildbereich**) der Abbildung heißt, und
- einer Vorschrift, die jedem Element des Definitionsbereiches genau ein Element des Wertebereiches zuordnet, der sogenannten **Zuordnungsvorschrift** (oder **Abbildungsvorschrift**) der Abbildung.

Ist f eine Abbildung, A der Definitionsbereich und B der Wertebereich von f, so schreibt man dieses symbolisch in der Form

$$f : A \longrightarrow B$$

(lies: „f von A nach B“ bzw. „f von A in B“) und nennt f eine **Abbildung von** A **nach** (oder: **in**) B.
Ist f eine Abbildung von A nach B, so heißt jedes $a \in A$ ein **Argument** von f. Das dem Argument $a \in A$ durch die Abbildungsvorschrift zugeordnete Element aus B wird mit $f(a)$ (lies: „f von a “) bezeichnet. $f(a)$ heißt der **Wert von** f **an der Stelle** (oder: **im Punkt**) a oder das **Bild von** a **unter** f.
Für jedes $b \in B$ nennt man jedes $a \in A$, für das $f(a) = b$ gilt, ein (!) **Urbild** von b unter f. Man symbolisiert die Zuordnung von Argument zu Wert durch

$$a \longmapsto f(a)$$

und sagt hierfür: f bildet a auf $f(a)$ ab.
Sind A und B Mengen, so bezeichnet man mit $\mathrm{Abb}(A, B)$ die Menge aller Abbildungen von A nach B

$$\mathrm{Abb}(A, B) := \{f \mid f : A \to B\}.$$

Statt $\mathrm{Abb}(A, B)$ schreibt man auch B^A.

1.3.2 Bemerkungen

(1) Nach Definition ist eine Abbildung durch drei Daten gegeben. Zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ sind also dann und nur dann gleich, wenn sie in allen drei Daten übereinstimmen, d. h. wenn $A = C$ und $B = D$ und für alle $x \in A$ $f(x) = g(x)$ gilt.
Zum Beispiel sind die durch

$$\begin{array}{rcl} f : \mathrm{I\!R} & \longrightarrow & \mathrm{I\!R} \\ f(x) & := & x^2 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{rcl} g : \mathrm{I\!R} & \longrightarrow & \{x \mid x \in \mathrm{I\!R} \quad \text{und} \quad x \geq 0\} \\ g(x) & := & x^2 \end{array}$$

nicht gleich, da sie verschiedene Wertebereiche haben.

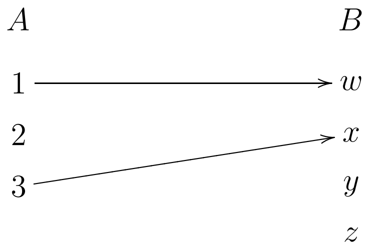
(2) Die Beschreibung einer konkret gegebenen Abbildung muss dementsprechend alle drei Daten enthalten. Üblicherweise geschieht das (wie in obigen Beispielen) in Form eines zweizeiligen Schemas, dessen erste Zeile die Gestalt

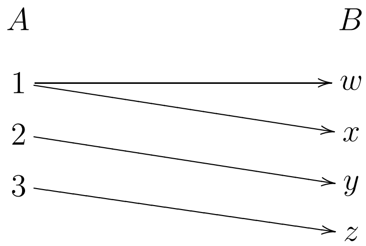
$$f: \quad \text{Definitionsbereich von} \quad f \longrightarrow \quad \text{Wertebereich von} \quad f$$

hat und dessen zweite Zeile die Abbildungsvorschrift angibt, sei es durch Definitionsgleichungen (wie oben) oder unter Verwendung des Zuordnungspfeils $\longmapsto$. In dieser letzten Schreibweise lautet z. B. die Definition der Abbildung f aus (1):

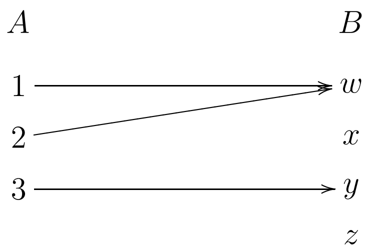
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2. \end{aligned}$$

(3) Ausdrücklich sei auch noch einmal auf die Bedingungen hingewiesen, die für die Zuordnungsvorschrift einer Abbildung $f : A \longrightarrow B$ gelten:
Zu *jedem* $a \in A$ gibt es *genau* ein $b \in B$ mit $f(a) = b$. Wählt man z.B. $A := \mathbb{N}_3$, $B := \{w, x, y, z\}$ und deutet jeweils Zuordnungen wie folgt durch Pfeile an





so stellen diese Beispiele keine Abbildungen dar, weil im ersten Fall nicht jedem $a \in A$ ein Bild zugeordnet ist, im zweiten Fall dem Argument 1 mehr als ein Element aus B zugeordnet werden.
Hingegen erfüllt das Schema



das genannte Kriterium. Man erhält hieraus die Abbildung

$$\begin{gathered} f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{w, x, y, z\} \\ f(1) := w, \quad f(2) := w, \quad f(3) := y. \end{gathered}$$

Dieses Beispiel zeigt zugleich, dass im allgemeinen nicht jedes Element des Wertebereiches einer Abbildung Bild eines Arguments sein muss (hier z. B.: x) und dass ein Element des Wertebereiches mehrere Argumente als Urbild besitzen kann (hier z. B.: w). Deshalb stand bei der Definition des Begriffs Urbild der unbestimmte Artikel. □

Für spezielle Abbildungen hat man Standardbezeichnungen:

1.3.3 Definition

(1) A sei eine Menge. Dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} id_A : \quad & A \longrightarrow A \\ & a \longmapsto a \qquad\qquad (\text{d.h.} \quad id_A(a) := a) \end{aligned}$$

die **identische Abbildung** (oder einfach die **Identität) auf** A .

(2) Ist A eine Menge und $U \subset A$ eine Teilmenge von A, so heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} in_{U,A} : U & \longrightarrow A \\ a & \longmapsto a \end{aligned}$$

die **Inklusionsabbildung von** U **in** A .

(3) Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ heißt eine **konstante Abbildung,** wenn es ein $b \in B$ gibt, so dass $b = f(a)$ für alle $a \in A$ gilt (d.h. alle Elemente von A werden auf ein Element aus B abgebildet). □

Für eine genauere Untersuchung vorgegebener Abbildungen muss man häufig wissen, wohin einzelne Teilmengen des Argumentbereichs abgebildet werden bzw. welche Argumente in eine vorgegebene Teilmenge des Bildbereichs abgebildet werden:

1.3.4 Definition

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung

(1) Für jede Teilmenge $U \subset A$ heißt

$$\begin{aligned} f(U) &:= \{f(x) \mid x \in U\} \\ &= \{y \mid y \in B \quad \text{und es gibt ein} \quad x \in U \quad \text{mit} \quad y = f(x)\} \end{aligned}$$

(lies: f von U) das **Bild von** U **unter** f.

(2) Für jede Teilmenge $V \subset B$ heißt

$$\overset{-1}{f}(V) := \{x \mid x \in A \quad \text{und} \quad f(x) \in V\}$$

(lies: f oben minus 1 von V) das **Urbild von** V **unter** f.

Für diese neuen Begriffe ergeben sich hinsichtlich der uns bekannten Mengenoperationen folgende Rechenregeln:

1.3.5 Satz

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung, U, U' seien Teilmengen von A und V, V' seien Teilmengen von B. Dann gilt:

(1) $f(U) \subset B$ *und* $\overset{-1}{f}(V) \subset A$.

(2) $U \subset U' \Rightarrow f(U) \subset f(U')$.
$V \subset V' \Rightarrow \overset{-1}{f}(V) \subset \overset{-1}{f}(V')$.

(3) $f(U \cup U') = f(U) \cup f(U')$.
$\overset{-1}{f}(V \cup V') = \overset{-1}{f}(V) \cup \overset{-1}{f}(V')$.

(4) $f(U \cap U') \subset f(U) \cap f(U')$.
$\overset{-1}{f}(V \cap V') = \overset{-1}{f}(V) \cap \overset{-1}{f}(V')$.

(5) $f(U \setminus U') \supset f(U) \setminus f(U')$.
$\overset{-1}{f}(V \setminus V') = \overset{-1}{f}(V) \setminus \overset{-1}{f}(V')$.

Beweis:
(1): Diese Aussagen folgen unmittelbar aus den Definitionen.
(2): Für alle $b \in B$ gilt:

$$\begin{aligned} b \in f(U) &\iff \exists\, u \in U \quad \text{mit} \quad b = f(u) \\ &\implies \exists\, u \in U' \quad \text{mit} \quad b = f(u), \quad \text{da} \quad U \subset U', \\ &\iff b \in f(U'). \end{aligned}$$

Für alle $a \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} a \in \overset{-1}{f}(V) &\iff f(a) \in V \\ &\implies f(a) \in V', \quad \text{da} \quad V \subset V', \\ &\iff a \in \overset{-1}{f}(V'). \end{aligned}$$

(3): Für alle $b \in B$ gilt:

$$\begin{aligned} b \in f(U \cup U') &\iff \exists\, a \in U \cup U' \quad \text{mit} \quad f(a) = b \\ &\iff \exists\, u \in U \quad \text{mit} \quad f(u) = b \quad \text{oder} \quad \exists\, u' \in U' \quad \text{mit} \quad f(u') = b \\ &\iff b \in f(U) \quad \text{oder} \quad b \in f(U') \\ &\iff b \in f(U) \cup f(U'). \end{aligned}$$

Für alle $a \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} a \in \overset{-1}{f}(V \cup V') &\iff f(a) \in V \cup V' \\ &\iff f(a) \in V \quad \text{oder} \quad f(a) \in V' \\ &\iff a \in \overset{-1}{f}(V) \quad \text{oder} \quad a \in \overset{-1}{f}(V') \\ &\iff a \in \overset{-1}{f}(V) \cup \overset{-1}{f}(V'). \end{aligned}$$

(4),(5): Die Beweise für diese Aussagen überlassen wir Ihnen zur Übung. [$\longrightarrow$**L**]

1.3.6 Bemerkung

Machen Sie sich an Beispielen klar, dass die Umkehrungen der Implikationen in 1.3.5 (2) nicht zu gelten brauchen und dass in (4) und (5) die Inklusionen nicht generell durch die Gleichheit ersetzt werden können.

Die Aussagen (3) und (4) gelten analog für verallgemeinerte Durchschnitte und Vereinigungen.

1.3.7 Aufgabe

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung, I eine nichtleere Menge, und für jedes $i \in I$ sei $U_i \subset A$ und $V_i \subset B$. Beweisen Sie:

(1) $f(\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} f(U_i)$ und $f(\bigcap_{i\in I} U_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(U_i)$.

(2) $\overset{-1}{f}(\bigcup_{i\in I} V_i) = \bigcup_{i\in I} \overset{-1}{f}(V_i)$ und $\overset{-1}{f}(\bigcap_{i\in I} V_i) = \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{f}(V_i)$. [$\longrightarrow$**L**]

Die strenge Auffassung, dass eine Abbildung gemäß 1.3.1 aus drei Daten besteht, macht es notwendig, spezielle Bezeichnungen zu verwenden, wenn man bei einer konkret angegebenen Abbildung lediglich daran interessiert ist, was diese Abbildung auf Teilmengen des Definitionsbereichs bewirkt, bzw. wenn man Elemente des Wertebereichs, die nicht als Bilder vorkommen, außer Acht lassen will.

1.3.8 Definition

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung.

(1) Für jede Teilmenge $U \subset A$ heißt die durch

$$\begin{aligned} f/U : U &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

gegebene Abbildung die **(Vor-)Beschränkung** (oder: **Restriktion**) **von** f **auf** U. Gelesen wird f/U als „f beschränkt auf U“.

(2) Für jede Teilmenge $V \subset B$ mit $f(A) \subset V$ heißt die durch

$$\begin{aligned} V\backslash f : A &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

gegebene Abbildung die **Nachbeschränkung von** f **auf** V**.** Gelesen wird $V \setminus f$ als „f nachbeschränkt auf V“.
Beachten Sie, dass die Nachbeschränkung nur für Teilmengen des Wertebereichs definiert ist, die das Bild des Definitionsbereichs umfassen.

(3) Ist $U \subset A$ und $V \subset B$ mit $f(U) \subset V$, so schreibt man abkürzend $V\backslash f/U$ anstelle von $V\backslash(f/U)$.

1.3.9 Beispiele

(1) Ist A eine Menge und $U \subset A$, so gilt $in_{U,A} = id_A/U$.

(2) Mit $\mathbb{R}_+ := \{x \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad x \geq 0\}$ gilt für die Abbildungen f, g aus 1.3.2(1): $g = \mathbb{R}_+ \backslash f$.

Kombiniert man die Konstruktionen von Bild und Urbild, so gilt der

1.3.10 Satz

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung, $U \subset A$ und $V \subset B$ Teilmengen.
Dann gilt:

(1) $U \subset \overset{-1}{f}(f(U))$.

(2) $V \supset f(\overset{-1}{f}(V))$.

Beweis:
(1): Für alle $a \in A$ gilt: $a \in U \Longrightarrow f(a) \in f(U) \Longrightarrow a \in \overset{-1}{f}(f(U))$.
(2): Für alle $b \in B$ gilt:

$$\begin{aligned} b \in f(\overset{-1}{f}(V)) &\Longrightarrow \exists\, a \in \overset{-1}{f}(V) \quad \text{mit} \quad b = f(a) \\ &\Longrightarrow \exists\, a \in A \quad \text{mit} \quad f(a) \in V \quad \text{und} \quad b = f(a) \\ &\Longrightarrow b \in V. \end{aligned}$$

1.3.11 Bemerkung

Die Aussagen des vorigen Satzes kann man i.a. nicht dahingehend verschärfen, dass man die Inklusionen durch das Gleichheitszeichen ersetzt. Z.B. gilt für die Abbildung f aus 1.3.2 (3) und $U := \{1\}$ bzw. $V := \{x, w\}$

$$\overset{-1}{f}(f(U)) = \overset{-1}{f}(f(\{1\})) = \overset{-1}{f}(\{w\}) = \{1, 2\} \neq U \quad \text{und}$$

$$f(\overset{-1}{f}(V)) = f(\overset{-1}{f}(\{w, x\})) = f(\{1, 2\}) = \{w\} \neq V.$$

Die Frage, welche Eigenschaften eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ haben muss, damit für alle $U \subset A$ die Gleichheit $U = \overset{-1}{f}(f(U))$ gilt, bzw. $f(\overset{-1}{f}(V)) = V$ für alle $V \subset B$ ist, bzw. beide Bedingungen erfüllt sind, führt fast beiläufig auf drei Klassen von Abbildungen, die für die gesamte weitere Theorie von fundamentaler Bedeutung sind.
Die speziellen Eigenschaften dieser Abbildungen lassen sich auf verschiedene Weise beschreiben. Üblicherweise wählt man für die Definition die folgende Formulierung:

1.3.12 Definition

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung.

(1) f heißt **surjektiv** (lies: sürjektiv) genau dann, wenn gilt:
Zu jedem $b \in B$ gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.

(2) f heißt **injektiv** genau dann, wenn gilt:
Für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt: $(f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2)$.

(3) f heißt **bijektiv** genau dann, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Abkürzend nennt man eine surjektive Abbildung **Surjektion**, eine injektive Abbildung **Injektion** und eine bijektive Abbildung **Bijektion**.

1.3.13 Beispiele

(1) Identische Abbildungen sind bijektiv, Inklusionsabbildungen injektiv [1.3.3].

(2) Ist $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung, so ist die Nachbeschränkung $f(A)\backslash f$ surjektiv [1.3.8].

(3) Ist $f : A \longrightarrow B$ eine injektive Abbildung, so ist für jedes $U \subset A$ die Restriktion f/U auch injektiv, denn ist das in der Definition 1.3.12 (2) gegebene Kriterium für alle $a_1, a_2 \in A$ erfüllt, so erst recht für alle $a_1, a_2 \in U$, da $U \subset A$.

(4) Aus (2) folgt, dass für jede injektive Abbildung $f : A \longrightarrow B$ die Nachbeschränkung $f(A)\backslash f$ eine Bijektion ist. □

Äquivalente Beschreibungen für die Surjektivität einer Abbildung liefert der

1.3.14 Satz

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *f ist surjektiv.*

(ii) *Für jede Teilmenge $V \subset B$ gilt $f(\overset{-1}{f}(V)) = V$.*

(iii) *Für jedes $b \in B$ gilt $f(\overset{-1}{f}(\{b\})) = \{b\}$.*

(iv) *Für jedes $b \in B$ enthält $\overset{-1}{f}(\{b\})$ mindestens ein Element* (d.h. *für jedes $b \in B$ ist $\overset{-1}{f}(\{b\}) \neq \emptyset$*).

(v) *$f(A) = B$.*

Beweis:

(i) ⇒ (ii): Nach 1.3.10 (2) gilt $f(\overset{-1}{f}(V)) \subset V$. Zu zeigen bleibt $V \subset f(\overset{-1}{f}(V))$.

$$\begin{aligned} x \in V \quad &\Longrightarrow \quad \exists\, a \in A \quad \text{mit} \quad f(a) = x \in V, \quad \text{denn} \quad V \subset B \quad \text{und} \quad f \quad \text{ist surjektiv,} \\ &\Longrightarrow \quad \exists\, a \in \overset{-1}{f}(V) \quad \text{mit} \quad f(a) = x \\ &\Longrightarrow \quad x \in f(\overset{-1}{f}(V)). \end{aligned}$$

(ii) ⇒ (iii): Für jedes $b \in B$ ist $\{b\} \subset B$. Die Behauptung folgt aus (ii) mit $V := \{b\}$.

(iii) ⇒ (iv): Für jedes $b \in B$ gilt nach (iii) $b \in f(\overset{-1}{f}(\{b\}))$. Nach Definition 1.3.4 (2) gibt es ein $a \in \overset{-1}{f}(\{b\})$ mit $f(a) = b$. Also gilt $\overset{-1}{f}(\{b\}) \neq \emptyset$.

(iv) ⇒ (v): $f(A) \subset B$ gilt nach 1.3.5 (1). Zu zeigen bleibt $B \subset f(A)$.

$$\begin{aligned} b \in B \quad &\Longrightarrow \quad \exists\, a \in \overset{-1}{f}(\{b\}), \quad \text{da} \quad \overset{-1}{f}(\{b\}) \neq \emptyset, \\ &\Longrightarrow \quad \exists\, a \in A \quad \text{mit} \quad f(a) = b \\ &\Longrightarrow \quad b \in f(A). \end{aligned}$$

(v) ⇒ (i): Sei $b \in B$. Nach (v) folgt $b \in f(A)$. Also gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. □

Für die Injektivität hat man die folgenden Charakterisierungen:

1.3.15 Satz

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *f ist injektiv.*

(ii) *Für jede Teilmenge $U \subset A$ gilt $\overset{-1}{f}(f(U)) = U$.*

(iii) *Für jedes $a \in A$ gilt $\overset{-1}{f}(f(\{a\}) = \{a\}$.*

(iv) *Für jedes $b \in B$ gilt: $\overset{-1}{f}(\{b\})$ enthält höchstens ein Element.*

(v) *Für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt: $(a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2).)$*

Beweis:
<u>(i) ⇒ (ii)</u>: Nach 1.3.10 (1) gilt $U \subset \overset{-1}{f}(f(U))$. Zu zeigen bleibt $\overset{-1}{f}(f(U)) \subset U$. Für alle $a \in A$ gilt nun:

$$\begin{aligned} a \in \overset{-1}{f}(f(U)) &\Longrightarrow f(a) \in f(U) \quad [1.3.4\ (2)] \\ &\Longrightarrow \exists\, u \in U \quad \text{mit} \quad f(a) = f(u) \\ &\Longrightarrow \exists\, u \in U \quad \text{mit} \quad a = u \quad (\text{da} \quad f \quad \text{injektiv ist } [1.3.12(2)]) \\ &\Longrightarrow a \in U. \end{aligned}$$

<u>(ii) ⇒ (iii)</u>: Für $a \in A$ wende man (ii) auf $U := \{a\}$ an.
<u>(iii) ⇒ (iv)</u>: Sei $b \in B$. Für alle $x, y \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} x, y \in \overset{-1}{f}(\{b\}) &\Longrightarrow f(x) = f(y) \quad (= b) \\ &\Longrightarrow f(\{x\}) = f(\{y\}), \quad \text{denn für jedes} \quad z \in A \quad \text{ist} \quad f(\{z\}) = \{f(z)\} \\ &\Longrightarrow \{x\} = \overset{-1}{f}(f(\{x\})) = \overset{-1}{f}(f(\{y\})) = \{y\} \\ &\Longrightarrow x = y. \end{aligned}$$

$\overset{-1}{f}(\{b\})$ enthält also höchstens ein Element.
<u>(iv) ⇒ (i)</u>: Seien $a_1, a_2 \in A$ mit $f(a_1) = f(a_2)$. Für $b := f(a_1)$ gilt dann $a_1 \in \overset{-1}{f}(\{b\})$ und $a_2 \in \overset{-1}{f}(\{b\})$. Nach (iv) folgt $a_1 = a_2$.
<u>(v) ⇔ (i)</u>: Die Aussage $(a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$ ist zu der Aussage $(f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2)$ äquivalent [1.1.8(2)]. □

Die Möglichkeiten, Injektivität und Surjektivität zu charakterisieren, sind mit den beiden vorausstehenden Sätzen keineswegs erschöpft! Wir überlassen Ihnen zur Übung (vgl. dazu auch 1.3.5, 1.3.6) die

1.3.16 Aufgabe

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung. Zeigen Sie:

(1) Folgende Aussagen sind äquivalent:

 (i) f ist injektiv.

 (ii) Für alle $U_1, U_2 \subset A$ gilt: $(U_1 \subset U_2 \Longleftrightarrow f(U_1) \subset f(U_2))$.

 (iii) Für alle $U_1, U_2 \subset A$ gilt: $f(U_1 \cap U_2) = f(U_1) \cap f(U_2)$.

(iv) Für alle $U_1, U_2 \subset A$ gilt: $f(U_1 \backslash U_2) = f(U_1) \backslash f(U_2)$.

(2) Äquivalent sind:

(i) f ist surjektiv.

(ii) Für alle $V_1, V_2 \subset B$ gilt: $(V_1 \subset V_2 \Longleftrightarrow \overset{-1}{f}(V_1) \subset \overset{-1}{f}(V_2))$. [$\longrightarrow$**L**]

Charakterisierungen der Bijektivität ergeben sich aufgrund der Definition 1.3.12 (3) aus denen für Surjektivität und Injektivität durch Konjunktion. Im Hinblick auf spätere Untersuchungen möchten wir hier lediglich das folgende Kriterium besonders hervorheben:

1.3.17 Satz

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung. Dann gilt:
f ist genau dann bijektiv, wenn es zu jedem $b \in B$ genau ein $a \in A$ mit $b = f(a)$ gibt.

Beweis:
Da f genau dann bijektiv ist, wenn f surjektiv und injektiv ist, folgt die Behauptung aus 1.3.14 (iv) und 1.3.15 (iv). □

Stimmt der Bildbereich einer Abbildung mit dem Definitionsbereich einer zweiten überein, so kann man die Abbildungsvorschrift dieser zweiten Abbildung auf die Bilder der ersten anwenden, und man erhält so eine neue Abbildung:

1.3.18 Definition

$f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen. Die durch

$$\begin{aligned} g \circ f \quad : \quad & A \longrightarrow C \\ & a \longmapsto g(f(a)) \end{aligned}$$

gegebene Abbildung heißt **Komposition** (oder auch: **Produkt, Verknüpfung, Verkettung, Hintereinanderschaltung, Hintereinanderanwendung**) von g mit f.
$g \circ f$ wird gelesen als „g nach f“ (oder: „g Kreis f“, „g Kringel f“).

1.3.19 Bemerkung

Auf zwei Aspekte der obigen Definition sei nachdrücklich hingewiesen:

(1) Für zwei Abbildungen f, g ist das Produkt $g \circ f$ nur definiert, wenn der Bildbereich von f mit dem Definitionsbereich von g übereinstimmt!

(2) Die Reihenfolge der Faktoren f und g in dem Produkt $g \circ f$ ist unbedingt zu beachten. Selbst wenn für zwei Abbildungen f und g außer dem Produkt $g \circ f$ auch das Produkt $f \circ g$ definiert ist, brauchen $g \circ f$ und $f \circ g$ nicht übereinzustimmen.

1.3.20 Beispiel

Die Abbildungen $f, g \in \mathit{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ seien gegeben durch $f(x) := 1 + x \quad (x \in \mathbb{R})$ bzw. $g(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$. Dann sind $f \circ g$ und $g \circ f$ definiert, und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(1 + x) = (1 + x)^2 \quad \text{und}$$
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 1 + x^2.$$

Aus $g \circ f(1) = 4 \neq 2 = f \circ g(1)$ folgt $f \circ g \neq g \circ f$.

1.3.21 Aufgabe

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung.
Zeigen Sie:

$$f \circ id_A = f = id_B \circ f. \qquad [\longrightarrow \mathbf{L}]$$

1.3.22 Satz (Assoziativgesetz für die Komposition von Abbildungen)

$f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C, h : C \longrightarrow D$ seien Abbildungen. Dann gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Beweis:
$g \circ f$ ist definiert, da der Wertebereich von f mit dem Definitionsbereich von g übereinstimmt. Analog überlegt man sich, dass die Produkte $h \circ (g \circ f)$, $h \circ g$ und $(h \circ g) \circ f$ definiert sind.
$h \circ (g \circ f)$ und $(h \circ g) \circ f$ haben beide Definitionsbereich A und Wertebereich D, und für alle $a \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(a) &= h((g \circ f)(a)) \\ &= h(g(f(a))) \\ &= (h \circ g)(f(a)) \\ &= ((h \circ g) \circ f)(a). \end{aligned}$$

□

Für Bilder bzw. Urbilder eines Produktes von Abbildungen gilt der

1.3.23 Satz

$f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen, U sei eine Teilmenge von A , V eine Teilmenge von C. Dann gilt:

(1) $(g \circ f)(U) = g(f(U))$.

(2) $\overset{-1}{(g \circ f)}(V) = \overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(V))$.

Beweis:
(1): Für alle $c \in C$ gilt:

$$\begin{aligned} c \in (g \circ f)(U) &\iff \exists\, u \in U : c = (g \circ f)(u) = g(f(u)) \\ &\iff \exists\, u \in U \quad \text{und} \quad \exists\, b \in B \quad \text{mit} \quad b = f(u) \quad \text{und} \quad c = g(b) \\ &\iff \exists\, b \in f(U) \quad \text{mit} \quad c = g(b) \\ &\iff c \in g(f(U)). \end{aligned}$$

(2): Für alle $a \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} a \in \overset{-1}{(g \circ f)}(V) &\iff (g \circ f)(a) \in V \\ &\iff g(f(a)) \in V \\ &\iff f(a) \in \overset{-1}{g}(V) \\ &\iff a \in \overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(V)). \end{aligned}$$

□

Injektivität, Surjektivität und Bijektivität bleiben bei der Komposition von Abbildungen erhalten:

1.3.24 Satz

$f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen. Dann gilt:

(1) *Sind f und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.*

(2) *Sind f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.*

(3) *Sind f und g bijektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv.*

Beweis:
(1): Für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) &\iff g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \\ &\Longrightarrow f(a_1) = f(a_2), \quad \text{da} \quad g \quad \text{injektiv ist [1.3.12(2)]}, \\ &\Longrightarrow a_1 = a_2, \quad \text{da} \quad f \quad \text{injektiv ist} \quad .\end{aligned}$$

Nach Definition 1.3.12 (2) ist $g \circ f$ injektiv.
(2):

$$\begin{aligned}(g \circ f)(A) &= g(f(A)) \quad [1.3.23(1)] \\ &= g(B), \quad \text{da} \quad f \quad \text{surjektiv ist [1.3.14(1)]}, \\ &= C, \quad \text{da} \quad g \quad \text{surjektiv ist [1.3.14(1)]}.\end{aligned}$$

Nach 1.3.14 (1) ist $g \circ f$ surjektiv.
(3): Nach (1) ist $g \circ f$ injektiv, nach (2) surjektiv. □

Die Umkehrungen der Aussagen (1) und (2) in gelten i.a. nicht. Aus der Injektivität bzw. Surjektivität eines Produktes lässt sich aber auf die entsprechende Eigenschaft eines der beteiligten Faktoren schließen:

1.3.25 Aufgabe

$f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen. Zeigen Sie:

(1) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

(2) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv. [$\longrightarrow$**L**]

Des weiteren gelten folgende „Kürzungsregeln “:

1.3.26 Satz

(1) *$f : A \longrightarrow B, g_1 : B \longrightarrow C, g_2 : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen. Dann gilt:*
Ist $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ und f surjektiv, so ist $g_1 = g_2$.

(2) *$f_1 : A \longrightarrow B, f_2 : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen. Dann gilt:*
Ist $g \circ f_1 = g \circ f_2$ und g injektiv, so ist $f_1 = f_2$.

Beweis:
(1): g_1 und g_2 haben gleiche Definitions- und Wertebereiche. Zu zeigen bleibt also: Für

alle $b \in B$ gilt $g_1(b) = g_2(b)$. Sei also $b \in B$. Da f surjektiv ist, gibt es zu b (mindestens) ein $a \in A$ mit $b = f(a)$. Damit gilt

$$\begin{aligned} g_1(b) &= g_1(f(a)) = (g_1 \circ f)(a) \\ &= (g_2 \circ f)(a), \quad \text{da} \quad g_1 \circ f = g_2 \circ f, \\ &= g_2(f(a)) = g_2(b). \end{aligned}$$

(2): f_1 und f_2 haben gleiche Definitions- und Wertebereiche. Da $g \circ f_1 = g \circ f_2$ ist, gilt für alle $a \in A$: $g(f_1(a)) = g(f_2(a))$, und da g injektiv ist, folgt hieraus $f_1(a) = f_2(a)$. □

Wir wenden uns nun der Frage der Umkehrbarkeit von Abbildungen zu.

1.3.27 Satz

$f : A \longrightarrow B$ sei eine bijektive Abbildung. Durch

$$\begin{aligned} f^{-1} &: B \longrightarrow A \\ & f^{-1}(b) := a, \quad \textit{falls} \quad f(a) = b \quad \textit{ist} \quad , \end{aligned}$$

ist eine Abbildung definiert, für welche die Identitäten

$$f^{-1} \circ f = id_A \quad \textit{und} \quad f \circ f^{-1} = id_B$$

gelten.

Beweis:
Da f bijektiv ist, gibt es zu jedem $b \in B$ genau ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ [1.3.17], also wird durch obige Zuordnungsvorschrift jedem Element aus B genau ein Element aus A zugeordnet, insgesamt also eine Abbildung von B nach A definiert.
Nach Definition von f^{-1} gilt für alle $a \in A$ und alle $b \in B$

$$f(a) = b \Longleftrightarrow f^{-1}(b) = a.$$

Aus der Implikation „$\Rightarrow$“ folgt: Für alle $a \in A$ ist $f^{-1}(f(a)) = a$. Aus der Implikation „$\Leftarrow$“ folgt: Für alle $b \in B$ ist $f(f^{-1}(b)) = b$.
Da $f^{-1} \circ f$ und id_A sowie $f \circ f^{-1}$ und id_B jeweils gleiche Definitions- und Wertebereiche haben, gelten obige Identitäten.

1.3.28 Definition

$f : A \longrightarrow B$ sei eine bijektive Abbildung. Die zu f wie in Satz 1.3.27 definierte Abbildung f^{-1} (lies: f hoch minus 1) heißt die **Umkehrabbildung von f** (oder: die **zu f inverse Abbildung**).

1.3.29 Bemerkungen

(1) Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen: Das Symbol f^{-1} ist nur für bijektives f definiert.

(2) Nicht nur aus dem in (1) genannten Grund ist sorgfältig zwischen dem Symbol f^{-1} (f hoch minus 1) und dem in 1.3.4(2) definierten $\overset{-1}{f}$ (f oben minus 1) zu unterscheiden. Auch für bijektives $f : A \longrightarrow B$ ist $\overset{-1}{f}$ keine Abbildung von B nach A!

(3) Durch die Gleichungen $f \circ f^{-1} = id_B$ und $f^{-1} \circ f = id_A$ ist die Umkehrabbildung von f vollständig charakterisiert, wie der folgende Satz zeigt:

1.3.30 Satz

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung. Dann gilt:
Gibt es eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$, die den Gleichungen

$$g \circ f = id_A \quad \text{und} \quad f \circ g = id_B$$

genügt, so ist f bijektiv und g die Umkehrabbildung von f.

Beweis:
Da id_A bijektiv ist, ist $g \circ f$ insbesondere injektiv, also f injektiv [1.3.25(2)]. Da id_B bijektiv ist, ist $f \circ g$ surjektiv, also ist f surjektiv [1.3.25(1)]. Insgesamt ist f also bijektiv. Folglich ist f^{-1} definiert, und es gilt

$$\begin{aligned} g &= g \circ id_B \quad [1.3.21] \\ &= g \circ (f \circ f^{-1}) \quad [1.3.27] \\ &= (g \circ f) \circ f^{-1} \quad [\text{Assoziativität: } 1.3.22] \\ &= id_A \circ f^{-1} \quad [\text{nach Voraussetzung}] \\ &= f^{-1} \quad [1.3.21] \quad . \end{aligned}$$

□

Aus dem letzten Satz ergeben sich einfache Beweise für die folgenden Aussagen:

1.3.31 Satz

(1) *$f : A \longrightarrow B$ sei eine bijektive Abbildung. Dann ist auch f^{-1} bijektiv, und es gilt*

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

(2) *$f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ seien bijektive Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f$ bijektiv, und es gilt*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Beweis:
<u>(1)</u>: Nach 1.3.27 existiert f^{-1}, und es gilt $f^{-1} \circ f = id_A$ und $f \circ f^{-1} = id_B$.
Aus 1.3.30 folgt, dass f^{-1} bijektiv und f die Umkehrabbildung von f^{-1} ist, also $(f^{-1})^{-1} = f$ gilt. (Zu $f^{-1} : B \longrightarrow A$ erfüllt ja die Abbildung $g := f$ die Voraussetzungen von 1.3.30).
<u>(2)</u>: Da f und g bijektiv sind, existieren die Umkehrabbildungen $f^{-1} : B \longrightarrow A$ und $g^{-1} : C \longrightarrow B$. Für diese ist das Produkt $f^{-1} \circ g^{-1}$ definiert, und es gilt

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \quad [1.3.22] \\ &= f^{-1} \circ id_B \circ f \quad [1.3.27] \\ &= f^{-1} \circ f \quad [1.3.21] \\ &= id_A \quad [1.3.27] \text{ und ebenso} \\ (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} \\ &= g \circ id_B \circ g^{-1} \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= id_C. \end{aligned}$$

Nach 1.3.30 folgt hieraus, dass $g \circ f$ bijektiv ist (was man natürlich auch mit 1.3.24 (3) hätte beweisen können) und dass $f^{-1} \circ g^{-1}$ die Umkehrabbildung von $g \circ f$ ist, d.h. es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.3.32 Aufgabe

M sei eine nichtleere Menge, $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge von M und c die durch

$$\begin{aligned} c : \mathfrak{P}(M) &\longrightarrow \mathfrak{P}(M) \\ X &\longmapsto M \backslash X \end{aligned}$$

gegebene Abbildung.

(1) Berechnen Sie $c \circ c$.

(2) Zeigen Sie, dass c bijektiv ist, und bestimmen Sie die Umkehrabbildung von c. [$\longrightarrow$**L**]

Auf der intuitiven Vorstellung, dass Definitionsbereich und Wertebereich einer Bijektion „gleich viele" Elemente enthalten müssen [1.3.17], beruht die

1.3.33 Definition

Zwei Mengen M und N heißen **gleichmächtig** genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : M \longrightarrow N$ gibt.

In Übereinstimmung mit unserem Sprachgebrauch erhält man dann die

1.3.34 Definition

M sei eine Menge.

(1) M heißt **endlich** (in Zeichen: $|M| < \infty$)

$$:\Longleftrightarrow \quad M = \emptyset \quad \text{oder es gibt ein} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{so dass} \\ M \quad \text{und} \quad \mathbb{N}_n \quad \text{gleichmächtig sind} \quad .$$

(2) M heißt **unendlich** (in Zeichen: $|M| = \infty$): $\Longleftrightarrow$ M ist nicht endlich.

(3) Ist M endlich, so heißt

$$|M| := \begin{cases} 0, & \text{falls } M = \emptyset \\ n, & \text{falls } M \text{ und } \mathbb{N}_n \text{ gleichmächtig sind.} \end{cases}$$

die **Kardinalzahl** (oder **Mächtigkeit**) von M.

1.3.35 Bemerkung

Wir setzen als bekannt voraus, dass $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ unendliche Mengen sind, ein Beweis dafür würde eine axiomatische Einführung der natürlichen Zahlen voraussetzen. Für den vorliegenden Kurs benötigen wir auch nicht die Tatsache, dass es unterschiedliche Stufen des „Unendlichseins" gibt. Wir notieren lediglich die

1.3.36 Definition

M sei eine Menge.

(1) M heißt **abzählbar**: $\Longleftrightarrow$ M und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig.

(2) M heißt **überabzählbar**: $\Longleftrightarrow$ M ist unendlich, aber nicht abzählbar.

Im Kurs „Analysis" werden Sie lernen, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar und $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

1.4 Relationen

Will man eine Beziehung (lat.: relatio) zwischen mathematischen Objekten (z.B. die Relation $a < b$ zwischen reellen Zahlen a, b) beschreiben, so reicht die bisher verwendete Mengenschreibweise nicht aus. Z.B. gilt $1 < 2$, aber nicht $2 < 1$. Wegen $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ genügt die Angabe der Menge der beteiligten Partner nicht, es bedarf eines Formalismus, der auch ihre Reihenfolge reflektiert.

1.4.1 Definition

Für beliebige Objekte x, y heißt

$$(x, y)$$

(lies: xy) ein **(geordnetes) Paar.**
x heißt die **erste Komponente,** y die **zweite Komponente** des geordneten Paares (x, y).
Zwei geordnete Paare (x, y) und (u, v) heißen genau dann gleich, wenn $x = u$ und $y = v$ ist, d.h.

$$(x, y) = (u, v) :\Longleftrightarrow x = u \quad \text{und} \quad y = v.$$

1.4.2 Bemerkung

(1) Ähnlich „naiv“ vorgehend wie bei der Bildung von Mengen durch Zusammenfassung von Objekten bildet man hier aus je zwei Objekten eine neue Größe, die mit (x, y) bezeichnet wird. Das Entscheidende der Konstruktion ist die Festlegung, unter welcher Bedingung zwei dieser Größen gleich sein sollen.

(2) Für $x \neq y$ ist $(x, y) \neq (y, x)$, in (x, y) ist also die Reihenfolge der Objekte x, y fixiert. In diesem Sinn sind Paare stets „geordnete“ Paare, das Wort „geordnet“ wurde deswegen in 1.4.1 in Klammern gesetzt, es wird im mathematischen Sprachgebrauch meistens fortgelassen und nur dann mit aufgeführt, wenn der Aspekt der Reihenfolge besonders betont wird.

(3) Um auf das zu Beginn gegebene Beispiel zurückzukommen: Die Aussage, dass $1 < 2$ gilt, aber nicht $2 < 1$, lautet jetzt: Die Beziehung „$<$“ trifft auf das Paar $(1, 2)$ zu, aber nicht auf $(2, 1)$.

1.4.3 Definition

M und N seien Mengen. Dann heißt

$$M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in N\}$$

(lies: M Kreuz N) das **cartesische Produkt** (oder: das **direkte Produkt** bzw. das **Kreuzprodukt**) von M und N.

1.4.4 Bemerkung

Die Bezeichnung „cartesisch“ erinnert an den französischen Philosophen und Mathematiker René Descartes (1596-1650), der entscheidend zur Entwicklung der Mathematik beitrug, als er 1637 die Ihnen von der Schule her bekannte Methodik einführte, geometrische Probleme zu behandeln, indem man nach Wahl eines rechtwinkligen Koordinatensystems die Punkte der Zeichenebene durch Paare reeller Zahlen – den Koordinaten – beschreibt.

1.4.5 Aufgabe

Sei $M := \{0, 1, 2\}$ und $N := \{2, 3\}$. Bestimmen Sie $M \times N$ und $N \times M$ durch Angabe ihrer Elemente. [$\rightarrow$ **L**]

1.4.6 Aufgabe

M, N, N' seien Mengen.
Zeigen Sie:

(1) $M \times N = \emptyset \Longleftrightarrow M = \emptyset \quad \text{oder} \quad N = \emptyset$.

(2) $M \times (N \cap N') = (M \times N) \cap (M \times N')$.
$M \times (N \cup N') = (M \times N) \cup (M \times N')$. [$\rightarrow$ **L**]

Die Konstruktion geordneter Paare ist ein Spezialfall der folgenden allgemeinen Begriffsbildung:

1.4.7 Definition

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für beliebige Objekte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ heißt

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

(lies: das n-Tupel der x_1 bis x_n) ein **(geordnetes)** n**-Tupel**. x_i heißt die i-te **Komponente** des n-Tupels $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i \in \mathbb{N}_n)$.
Zwei n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ heißen genau dann gleich, wenn für alle $i \in \mathbb{N}_n$ $x_i = y_i$ gilt, d.h.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) :\Longleftrightarrow \forall\, i \in \mathbb{N}_n \quad \text{ist} \quad x_i = y_i.$$

Der Fall $n = 1$ ist nur der Vollständigkeit halber aufgeführt. In der Praxis lässt man den formalen Unterschied zwischen dem Objekt x_1 und dem 1-Tupel (x_1) außer Acht. Im Fall $n = 2$ spricht man in Übereinstimmung mit 1.4.1 von Paaren statt von 2-Tupeln.
3-Tupel nennt man auch **Tripel** , 4-Tupel **Quadrupel** , 5-Tupel **Quintupel** etc.

1.4.8 Definition

Es sei $n \in \mathbb{N}$. $M_1, M_2, \ldots, M_n$ seien Mengen. Dann heißt

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} M_i := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in M_i (\forall\, i \in \mathbb{N}_n)\}$$

(lies: direktes Produkt der M_1 bis M_n) das n**-fache cartesische** (oder: **direkte** oder: **Kreuz-**) **Produkt der** M_1 **bis** M_n**.**
Für $k \in \mathbb{N}_n$ heißt die durch

$$\begin{aligned} p_k \quad : \quad \mathop{\times}_{i=1}^{n} M_i &\longrightarrow M_k \\ (x_1, x_2, \ldots x_n) &\longmapsto x_k \end{aligned}$$

gegebene Abbildung die k-te **Projektion von** $\mathop{\times}_{i=1}^{n} M_i$ **(auf** M_k**).**

Zum Gebrauch des Wortes „geordnet“ bei n-Tupeln gilt im wesentlichen das in 1.4.2 (2) über Paare Gesagte.

Speziell ergibt sich aus der Definition $\bigtimes_{i=1}^{1} M_i = M_1$ (vgl. obige Konvention über 1-Tupel) und $\bigtimes_{i=1}^{2} M_i = M_1 \times M_2$ [1.4.3].
In dem Sonderfall, dass die Mengen M_i gleich sind, verwendet man die Potenzschreibweise: Ist $n \in \mathbb{N}$ und M eine Menge, so definiert man

$$M^n := \bigtimes_{i=1}^{n} M_i \quad \text{mit} \quad M_1 := M_2 := \ldots := M$$

und nennt M^n (lies: M hoch n) das n-fache cartesische Produkt von M.

1.4.9 Bemerkung

(1) n-Tupel reflektieren nicht nur die Reihenfolge der aus ihnen gebildeten Objekte, man wird sie auch immer dann verwenden, wenn es gilt, mehrfaches Vorkommen einzelner Objekte zu berücksichtigen. Das wollen wir hier nur an einem Beispiel erläutern: Jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben, z.B. gilt $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Beide Zahlen sind Produkte von Elementen der Menge $\{2, 3\}$. Diese Angabe reicht also in ihrer Beschreibung nicht aus, wohl aber die Aussage, dass 12 das Produkt der Komponenten des Tripels $(2, 2, 3)$ und 18 das Produkt der Komponenten von $(2, 3, 3)$ ist.

(2) n-Tupel genügen nicht, die geschilderten Sachverhalte zu beschreiben, wenn die Anzahl der zu betrachtenden Objekte nicht mehr endlich ist. Zum besseren Verständnis der hierfür notwendigen Konstruktion beweisen wir zunächst den

1.4.10 Satz

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine Menge. Dann ist die durch

$$\begin{aligned} \phi \ : \ \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_n, M) &\longrightarrow M^n \\ f &\longmapsto (f(1), f(2), \ldots, f(n)) \end{aligned}$$

gegebene Abbildung eine Bijektion.

Beweis:
ϕ ist injektiv, denn sind $f, g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_n, M)$ mit $\phi(f) = \phi(g)$, so ist $(f(1), f(2), \ldots, f(n)) = (g(1), g(2), \ldots, g(n))$ und folglich $f(k) = g(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_n$, d.h. es gilt $f = g$.
ϕ ist auch surjektiv: Zu $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M^n$ definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} f_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)} \ : \ \mathbb{N}_n &\longmapsto M \\ f_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)}(k) &:= x_k \quad (k \in \mathbb{N}_n) \end{aligned}$$

Dann ist $f_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)} \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_n, M)$ Urbild von $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ unter ϕ, denn

$$\begin{aligned} \phi(f_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)}) &= (f_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)}(1), f_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)}(2), \ldots, f_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)}(n)) \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

ϕ ist also injektiv und surjektiv und damit bijektiv [1.3.12(3)].

1.4.11 Aufgabe

Beweisen Sie die Aussage des Satzes 1.4.10 mit Hilfe des Kriteriums aus Satz 1.3.30, d.h. konstruieren Sie eine Abbildung $\psi : M^n \longrightarrow \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_n, M)$, für die $\psi \circ \phi$ die Identität auf $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}_n, M)$ und $\phi \circ \psi$ die Identität auf M^n ist. [→ **L**]

Nach 1.4.10 kann man also jedes n-Tupel eindeutig durch eine Abbildung beschreiben, wobei die Komponenten, aus denen das n-Tupel gebildet wird, gerade die Werte dieser Abbildung sind. Auf diesem Zusammenhang basiert die

1.4.12 Definition

M sei eine Menge.

(1) I sei eine nichtleere Menge, und für jedes $i \in I$ sei ein Element $x_i \in M$ gegeben. Mit

$$(x_i \mid i \in I) \quad \text{(oder auch:} \quad (x_i)_{i \in I})$$

(lies: Familie der $x_i, i \in I$) bezeichnen wir die durch

$$\begin{aligned} f \ : \ & I \longrightarrow M \\ & f(i) := x_i \end{aligned}$$

gegebene Abbildung.
Wir nennen den Ausdruck $(x_i \mid i \in I)$ (bzw. $(x_i)_{i \in I}$) eine **(I-indizierte) Familie von Elementen aus** M (oder kurz: eine Familie in M).

(2) Sind $(x_i \mid i \in I)$ und $(y_i \mid i \in J)$ Familien in M, so heißt $(y_i \mid i \in J)$ eine **Teilfamilie** von $(x_i \mid i \in I)$, wenn $J \subset I$ und $(y_i \mid i \in J)$ die Beschränkung von $(x_i \mid i \in I)$ auf J ist.

1.4.13 Bemerkungen

(1) Jede Familie ist definitionsgemäß eine Abbildung. Jede Abbildung $f : I \to M$ lässt sich in der Form $(f(i) \mid i \in I)$ als I-indizierte Familie in M schreiben. „Familie“ ist also nur ein anderer Name für „Abbildung“ .

(2) Die Bedingung für die Gleichheit zweier Familien $(x_i \mid i \in I)$ und $(y_i \mid i \in J)$ aus M ergibt sich aus der Gleichheit der zugrundeliegenden Abbildungen:

$$(x_i \mid i \in I) = (y_i \mid i \in J) \Longleftrightarrow I = J \quad \text{und für alle} \quad i \in I \quad \text{gilt} \quad x_i = y_i.$$

(3) Nach Satz 1.3.10 kann man das n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M^n$ durch die Familie $(x_k \mid k \in \mathbb{N}_n)$ in M eindeutig beschreiben. n-Tupel kann man also als spezielle (nämlich durch endliche Mengen indizierte) Familien auffassen.

(4) Eine $\mathbb{N}$-indizierte Familie bezeichnet man auch als **Folge** . □

Jede Eigenschaft E lässt sich vollständig beschreiben durch die Gesamtheit der Objekte, die diese Eigenschaft besitzen, d.h. durch die Menge $\{x \mid E(x)\}$, denn zwei Eigenschaften sind ja nur dann verschieden, wenn es mindestens ein Objekt gibt, auf das eine der Eigenschaften zutrifft, die andere aber nicht. Analog beschreibt man eine Beziehung durch die Menge der Paare, auf die die Beziehung zutrifft:

1.4.14 Definition

(1) Eine Menge R heißt eine **Relation** genau dann, wenn es Mengen M und N gibt, so dass $R \subset M \times N$ gilt.

(2) Gilt $R \subset M \times N$ für zwei Mengen M und N, so sagt man, dass R eine **Relation zwischen** M **und** N ist. Im Spezialfall $M = N$ nennt man eine Relation $R \subset M \times M$ ein **Relation auf** M.

(3) Ist $R \subset M \times N$ eine Relation zwischen M und N, so sagt man für $x \in M$ und $y \in N$:
x und y **stehen in der Relation** R (oder: x und y **erfüllen** R, oder: R **trifft auf** (x, y) **zu**) genau dann, wenn $(x, y) \in R$ gilt.
Statt $(x, y) \in R$ schreibt man auch xRy.

(4) Ist $R \subset M \times N$ eine Relation zwischen M und N, so heißt

$$R^{-1} := \{(x, y) \mid (y, x) \in R\} \subset N \times M$$

(lies: R hoch minus 1) die zu R **inverse Relation** oder die **Umkehrrelation** von R.

(5) Ist M eine Menge, $R \subset M \times M$ eine Relation auf M und $U \subset M$ eine Teilmenge von M, so nennt man

$$\begin{aligned} R/U : &= R \cap (U \times U) \\ &= \{(x, y) \mid x, y \in U \quad \text{und} \quad xRy\} \subset U \times U \end{aligned}$$

die **Einschränkung** (oder: **Restriktion**) von R auf U.

1.4.15 Beispiele

M sei eine Menge

(1) $R := \emptyset \subset M \times M$ heißt die **leere Relation** auf M. Für kein Paar $(x, y) \in M \times M$ gilt $(x, y) \in \emptyset$.

(2) $R := M \times M$ heißt die **Allrelation** auf M. Für alle Paare $(x, y) \in M \times M$ gilt $(x, y) \in M \times M$.

(3) $\Delta_M := \{(x, x) \mid x \in M\}$ heißt die **Diagonale** von M. Für alle $(x, y) \in M \times M$ gilt:

$$(x, y) \in \Delta_M \Longleftrightarrow x = y.$$

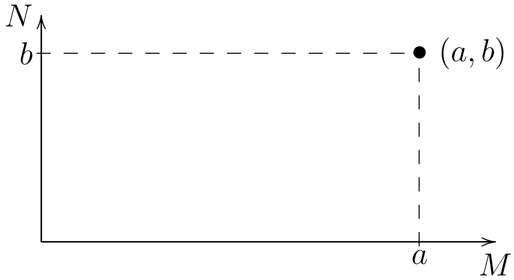
Δ_M heißt daher die **Gleichheitsrelation** auf M.

(4) Die Inklusion ist eine Relation auf der Potenzmenge von M, gegeben durch

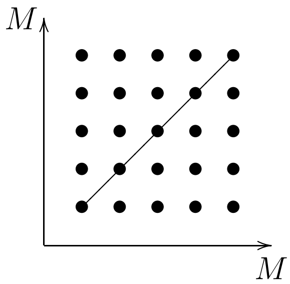
$$\{(U, V) \mid U \subset V \subset M\} \subset \mathfrak{P}(M) \times \mathfrak{P}(M).$$

1.4.16 Bemerkung

(1) Die Bezeichnung „Diagonale“ für die Gleichheitsrelation ist geometrisch motiviert: Kann man die Elemente der Mengen M und N durch Punkte auf Geraden repräsentieren, so die Elemente aus $M \times N$ durch Punkte der Ebene, indem man nach Wahl eines rechtwinkligen Achsenkreuzes dem Element $(a, b) \in M \times N$ den Punkt mit den „Koordinaten“ a, b zuordnet

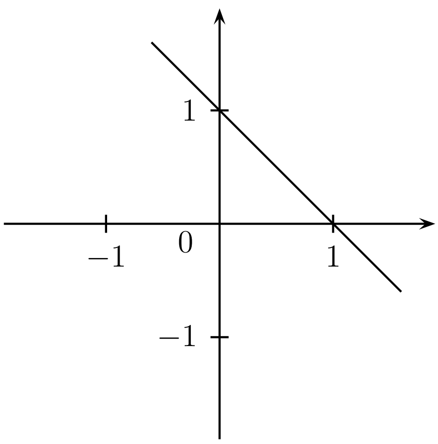


Eine Relation $R \subset M \times N$ lässt sich dann dadurch graphisch darstellen, dass man genau die Punkte in die Ebene zeichnet, deren Koordinatenpaare Elemente aus R sind. Im Fall $M = N$ erhält man (bei gleicher Skalierung der Koordinatenachsen) so für die Gleichheitsrelation eine Diagonale

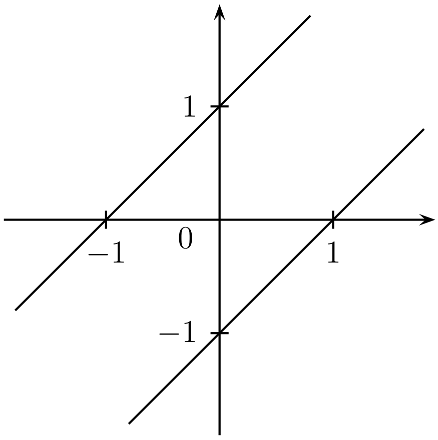


(2) Aus der Schulzeit ist Ihnen der Fall $M = N = \mathbb{R}$ vetraut: Man ordnet den reellen Zahlen die Punkte der „Zahlengerade“ zu und wählt ein rechtwinkliges („cartesisches“) Koordinatensystem, dessen waagerechte Achse als x-Achse (oder „Abszisse“), die dazu senkrechte als y-Achse (oder „Ordinate“) bezeichnet wird. Dem Element $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ entspricht dann der Punkt der Zeichenebene mit den Koordinaten a in Richtung der x-Achse und b in Richtung der y-Achse.
Die oben beschriebene Möglichkeit der Darstellung von Relationen auf $\mathbb{R}$ sei an folgenden Beispielen gezeigt:

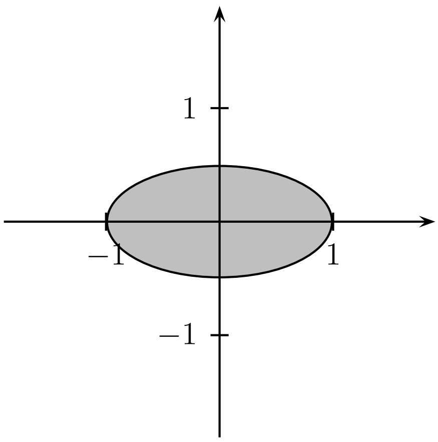
$$R_1 := \{(x, y) \mid x + y = 1\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad :$$



$$R_2 := \{(x,y) \mid |x-y| = 1\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad :$$



$$R_3 := \{(x,y) \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad :$$



Auf diesen geometrischen Zusammenhängen beruht die

1.4.17 Definition

A, B seien Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann heißt die durch

$$G_f := \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subset A \times B$$

gegebene Relation zwischen A und B der **Graph** von f.

1.4.18 Bemerkung

(1) Bei vorgebenen Mengen A und B ist jede Abbildung f von A nach B durch ihren Graphen eindeutig bestimmt, d.h. gilt $f, g \in \text{Abb}(A, B)$ und $G_f = G_g$, so ist $f = g$. (Beweisen Sie das bitte!). [→**L**]

(2) Jeder Abbildung $f : A \to B$ entspricht durch die Zuordnung $f \longmapsto G_f$ eine Relation zwischen A und B, aber nicht jede Relation von A nach B ist Graph einer Abbildung von A nach B! Hier gilt der

1.4.19 Satz

A, B seien Mengen und R eine Relation zwischen A und B. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *Es gibt eine Abbildung $f : A \to B$ mit $R = G_f$.*

(ii) *Zu jedem $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in R$.*

Beweis:
(i) $\Rightarrow$ (ii): Für jedes $a \in A$ gilt $(a, f(a)) \in G_f$, und es gibt kein $b \in B$ mit $b \neq f(a)$ und $(a, b) \in G_f$ [1.3.2(3)]. Für $R = G_f$ gilt also (ii).
(ii) $\Rightarrow$ (i): Für jedes $a \in A$ sei $f(a) := b, \quad \text{falls} \quad (a, b) \in R.$
Dadurch wird eine Abbildung f von A nach B definiert, denn wegen (ii) wird jedem $a \in A$ genau ein Element aus B zugeordnet. Nach Konstruktion gilt für alle $(a, b) \in A \times B$:

$$(a, b) \in R \iff a \in A \quad \text{und} \quad b = f(a) \iff (a, b) = (a, f(a)) \iff (a, b) \in G_f.$$

Also ist $R = G_f$ für das so konstruierte f.

1.4.20 Bemerkung

(1) Für die Beispiele aus 1.4.16 erkennt man: R_1 ist der Graph der Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := 1 - x$, R_2 und R_3 sind nicht Graphen von Abbildungen; z.B. gilt $(0, 1) \in R_2$ und $(0, -1) \in R_2$ und für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt $2^2 + 4y^2 > 1$, so dass es kein $y \in \mathbb{R}$ mit $(2, y) \in R_3$ gibt.

(2) Sind A und B Mengen und $R \subset A \times B$ eine Relation mit der Eigenschaft (ii) aus 1.4.19, so bestimmen diese Daten eindeutig eine Abbildung, nämlich die Abbildung $f : A \to B$ mit dem Graphen $G_f = R$ [1.4.19,1.4.18(1)]. Man kann sagen: Eine Abbildung ist ein Tripel (A, B, R) bestehend aus zwei Mengen A, B und einer Relation R zwischen A und B, mit der Eigenschaft, dass zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in R$ existiert.
Mit dieser Formulierung hat man eine Alternative zur Definition 1.3.1, die ohne den dort nicht näher präzisierten Begriff „Zuordnungsvorschrift“ auskommt. □

Im nächsten Abschnitt werden wir uns mit speziellen Relationen befassen und stellen hierfür zunächst einige Bezeichnungen zusammen:

1.4.21 Definition

M sei eine Menge und R eine Relation auf M (d.h. $R \subset M \times M$).

(1) R heißt **reflexiv** $:\iff$ Für alle $x \in M$ gilt: xRx.

(2) R heißt **symmetrisch** $:\iff$ Für alle $x, y \in M$ gilt: $xRy \Longrightarrow yRx$.

(3) R heißt **transitiv** $:\iff$ Für alle $x, y, z \in M$ gilt: $(xRy$ und $yRz) \Longrightarrow xRz$.

(4) R heißt **antisymmetrisch** $:\iff$ Für alle $x, y \in M$ gilt:
$(xRy$ und $yRx) \Longrightarrow x = y$.

(5) R heißt **linear** (oder: **total**) $:\iff$ Für alle $x, y \in M$ gilt: xRy oder yRx.

1.4.22 Beispiele

(1) Sei $M := \mathbb{R}$ und $R := \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \text{ und } x \leq y\}$. R ist reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und linear, aber nicht symmetrisch, denn es gilt (z.B.) $1 \leq 2$, aber nicht $2 \leq 1$.

(2) Sei $M := \mathbb{R}$ und $R := \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \text{ und } x < y\}$. R ist transitiv, antisymmetrisch [1.1.5: die Prämisse „xRy und yRx“ ist für kein Paar $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wahr!], aber weder reflexiv, noch symmetrisch, noch linear (z.B. für $x = y = 1$ gilt weder xRy noch yRx).

(3) Es sei $M = \mathbb{Z}$ und $R := \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z} \text{ und } x \text{ teilt } y\}$. [Zur Erinnerung: x teilt y (in Zeichen: $x|y$) bedeutet: Es gibt ein $v \in \mathbb{Z}$, so dass $y = v \cdot x$ gilt]. R ist reflexiv und transitiv, aber weder symmetrisch noch antisymmetrisch [z.B. gilt $1|(-1)$ und $(-1)|1$] und auch nicht linear. Die Restriktion von R auf $\mathbb{N}$ ist allerdings antisymmetrisch.

(4) Ist M eine Menge, so ist die Inklusion eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation auf $\mathfrak{P}(M)$ [1.2.8, (2)–(4)]. Sie ist aber nicht symmetrisch und nicht linear, wenn M mehr als ein Element enthält (Für $x, y \in M, x \neq y$, gilt weder $\{x\} \subset \{y\}$ noch $\{y\} \subset \{x\}$).

1.4.23 Aufgabe

M sei eine Menge und R sei eine Relation auf M. Δ_M sei die Diagonale von M, R^{-1} die Umkehrrelation von R und $R \circ R$ die durch

$$R \circ R := \{(x,y) \mid x,y \in M \quad \text{und es gibt ein} \quad z \in M \quad \text{mit} \quad xRz \quad \text{und} \quad zRy\}$$

gegebene Relation auf M.
Beweisen Sie:

(1) R ist reflexiv $\iff \Delta_M \subset R$.

(2) R ist symmetrisch $\iff R = R^{-1}$.

(3) R ist transitiv $\iff R \circ R \subset R$.

(4) R ist antisymmetrisch $\iff R \cap R^{-1} \subset \Delta_M$.

(5) R ist linear $\iff R \cup R^{-1} = M \times M$. [$\rightarrow$ **L**]

1.5 Äquivalenz- und Ordnungsrelationen

Im Hinblick auf eine spezielle Fragestellung können zwei Objekte gleichwertig (lat.: aequivalens) sein, auch wenn sie nicht gleich sind. Z.B. sind für das Ergebnis einer Parlamentswahl zwei Personen gleichwertig, wenn sie dieselbe Partei gewählt haben, so unterschiedlich sie auch sonst sein mögen. Eine solche Relation des Gleichwertigseins kann man als Verallgemeinerung der Gleichheitsrelation auffassen.

1.5.1 Definition

M sei eine Menge und R eine Relation auf M.
R heißt **Äquivalenzrelation (auf M)** genau dann, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

1.5.2 Beispiele

(1) Auf jeder Menge M sind die Gleichheitsrelation Δ_M und die Allrelation $M \times M$ [1.4.15] Äquivalenzrelationen.

(2) Auf $\mathbb{Z}$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Relation

$$R_n := \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad n \mid (a-b)\}$$

eine Äquivalenzrelation. (Können Sie das beweisen?) [→**L**]

(3) Aus dem Geometrieunterricht Ihrer Schulzeit kennen Sie die Begriffe der Kongruenz bzw. der Ähnlichkeit von Dreiecken.

1.5.3 Bemerkung

In Analogie zur Gleichheit (=) verwendet man im Zusammenhang mit Äquivalenzrelationen üblicherweise das Zeichen $\sim$ (oder: $\approx$). Ist R eine Äquivalenzrelation auf der Menge M, so schreibt man für $x, y \in M$ anstelle von $(x,y) \in R$ (oder xRy)

$$x \sim y \bmod R \quad (\text{oder:} \quad x \sim y(R) \quad \text{oder:} \quad x \sim_R y)$$

(lies: x äquivalent y modulo R), bzw. einfach $x \sim y$ (lies: x äquivalent y), wenn aus dem Zusammenhang klar ist, um welche Äquivalenzrelation es sich handelt.
Die Bedingungen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge M ist, lauten in dieser Schreibweise:

Für alle $x, y, z \in M$ gilt:

(R) $x \sim x$.

(S) $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$.

(T) $x \sim y$ und $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$.

Die Behandlung eines konkret gegebenen Problems kann man häufig dadurch vereinfachen, dass man jeweils die Objekte, die in bezug auf die vorliegende Fragestellung gleichwertig sind, in „Klassen“ zusammenfasst und desweiteren mit diesen Klassen operiert. Im Zusammenhang mit Äquivalenzrelationen verwendet man üblicherweise die folgenden Bezeichnungen:

1.5.4 Definition

M sei eine Menge und R eine Äquivalenzrelation auf M.

(1) Für $x \in M$ heißt

$$[x]_R := \{y \mid y \in M \quad \text{und} \quad y \sim x \quad \text{mod} \quad R\}$$

die ($R-$)**Äquivalenzklasse von** x.
Eine Teilmenge $K \subset M$ nennt man eine ($R-$)**Äquivalenzklasse** , wenn es ein $x \in M$ gibt mit $K = [x]_R$.
Ist K eine $R-$Äquivalenzklasse, so heißt jedes $x \in K$ ein **Vertreter** (oder: **Repräsentant**) von K.

(2) Die Menge

$$\begin{aligned} M/R &:= \{K \mid K \quad \text{ist} \quad R-\text{Äquivalenzklasse}\} \\ &= \{[x]_R \mid x \in M\} \end{aligned}$$

(lies: M über R (oder: M nach R, oder: M modulo R)) heißt die **Quotientenmenge** von M nach R (oder auch die zu R gehörige **Klasseneinteilung**).

(3) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_R : M &\longrightarrow M/R \\ x &\longmapsto [x]_R \end{aligned}$$

heißt die zu R gehörige **kanonische Projektion**.

(4) Eine Teilmenge $V \subset M$ heißt ein **vollständiges Vertretersystem (modulo** R**)** genau dann, wenn die Einschränkung $\pi_R/V : V \longrightarrow M/R$ eine Bijektion ist.

Ist aus diesem Zusammenhang klar, um welche Äquivalenzrelation $\sim$ es sich handelt, schreibt man einfach $[x]$ statt $[x]_R$, π statt π_R und $M/\sim$ statt M/R.

1.5.5 Satz

M sei eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann gilt:

(1) *Für jedes $x \in M$ gilt $x \in [x]$.*

(2) $M = \bigcup\{[x] \mid x \in M\}$.

(3) *Für alle $x, y \in M$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) $x \sim y$.
- (ii) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.
- (iii) $[x] = [y]$.

(4) *Die kanonische Projektion $\pi : M \to M/\sim$ ist surjektiv.*

Beweis:
(1): Aufgrund der Reflexivität jeder Äquivalenzrelation gilt für jedes $x \in M$ $x \sim x$, also $x \in [x]$.
(2): Für jedes $x \in M$ gilt $[x] \subset M$, also gilt $\bigcup\{[x] \mid x \in M\} \subset M$ [1.2.21(2)]. Die Inklusion $M \subset \bigcup\{[x] \mid x \in M\}$ folgt aus (1):

$$y \in M \Longrightarrow y \in [y] \subset \bigcup\{[x] \mid x \in M\} \quad [1.2.20(1)] \quad .$$

(3): Wir führen den Beweis, indem wir die Gültigkeit der Implikationskette (i)⇒(iii)⇒(ii)⇒(i) zeigen:
(i)⇒(iii): Für alle $z \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} z \in [x] \quad &\Rightarrow \quad z \sim x \quad \text{und} \quad x \sim y \quad \text{(wegen (i))} \\ &\Rightarrow \quad z \sim y \quad \text{(Transitivität)} \\ &\Rightarrow \quad z \in [y]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z \in [y] \quad &\Rightarrow \quad z \sim y \quad \text{und} \quad x \sim y \\ &\Rightarrow \quad z \sim y \quad \text{und} \quad y \sim x \quad \text{(Symmetrie)} \\ &\Rightarrow \quad z \sim x \quad \text{(Transitivität)} \\ &\Rightarrow \quad z \in [x]. \end{aligned}$$

Also gilt $[x] = [y]$.
(iii)⇒ (ii): Nach (1) gilt $x \in [x]$, mit $[x] = [y]$ also $x \in [x] \cap [y]$, also die Aussage (ii).
(ii)⇒ (i): Nach Voraussetzung (ii) gibt es ein $z \in M$ mit $z \in [x] \cap [y]$, d.h. $z \sim x$ und $z \sim y$. Aufgrund der Symmetrie von $\sim$ folgt $x \sim z$ und $z \sim y$, mit der Transitivität von $\sim$ folgt die Behauptung: $x \sim y$.
(4): Ist $K \in M/\sim$ eine $\sim$-Äquivalenzklasse, so gibt es ein $x \in M$ mit $K = [x]$, also $K = \pi(x)$. Folglich ist π surjektiv.

1.5.6 Aufgabe

M sei eine Menge, R eine Äquivalenzrelation auf M und $V \subset M$ eine Teilmenge von M. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) V ist ein vollständiges Vertretersystem (modulo R).

(ii) Zu jedem $x \in M$ gibt es genau ein $v \in V$ mit $x \sim v \bmod R$. [→**L**]

1.5.7 Bemerkung

(1) Aus den Aussagen des vorangegangenen Satzes folgt insbesondere: Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M, so gilt:

- Äquivalenzklassen sind nichtleere Teilmengen von M (vgl.(1)).
- Zwei Äquivalenzklassen sind entweder gleich oder disjunkt ((3)(ii),(iii)).
- Sind zwei Elemente $x, y \in M$ zueinander äquivalent (aufgrund der Symmetrie von R ist diese Redeweise gerechtfertigt), so gehören sie der gleichen Äquivalenzklasse an (nach (1) und (3) (iii) gilt dann ja $x \in [x] = [y] \ni y$).

- Je zwei Elemente derselben Äquivalenzklasse sind zueinander äquivalent, denn zwei Elemente, die zu einem dritten äquivalent sind, sind auch zueinander äquivalent (vgl. den Beweis der Implikation (ii) $\Rightarrow$(i) des Satzes).

Es sind also jeweils alle zueinander äquivalenten Elemente zu einer Äquivalenzklasse zusammengefaßt.

(2) Die Schreibweise von Äquivalenzklassen in der Form $[x]$, also als Menge aller zu einem Element äquivalenten Elemente (hier: x) ist für praktische Anwendungen sehr vorteilhaft. Sie darf aber nicht zu der Annahme verleiten, dass das Element x durch die Klasse $[x]$ eindeutig bestimmt sei. Dieses gilt es insbesondere zu beachten bei Abbildungen von Quotientenmengen.

1.5.8 Satz

$f : A \to B$ sei eine Abbildung, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A und π die zugehörige kanonische Projektion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *Es gibt genau eine Abbildung $\bar{f} : A/\sim \;\to B$ mit $f = \bar{f} \circ \pi$.*

(ii) *Für alle $x, y \in A$ gilt:*

$$x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y).$$

Ist für f und $\sim$ die Bedingung (ii) erfüllt, so heißt die nach (i) gegebene Abbildung $\bar{f}$ **die durch f auf $A/\sim$ induzierte Abbildung**.

Beweis:
(i) $\Rightarrow$(ii): Für alle $x, y \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} x \sim y &\iff [x] = [y] \quad [1.5.5(3)] \\ &\iff \pi(x) = \pi(y) \\ &\Longrightarrow \bar{f}(\pi(x)) = \bar{f}(\pi(y)) \\ &\Longrightarrow f(x) = f(y), \quad \text{da} \quad f = \bar{f} \circ \pi. \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Eindeutigkeit: Sind g, h Abbildungen von $A/\sim$ nach B mit $f = g \circ \pi$ und $f = h \circ \pi$, so folgt, da π surjektiv ist, aus $g \circ \pi = h \circ \pi$ die Gleichheit von g und h [1.3.26(1)].
Existenz: Wenn es ein solches $\bar{f}$ gibt, muss wegen $f = \bar{f} \circ \pi$ für alle $x \in A$ $f(x) = \bar{f}([x])$ gelten. Wir definieren also

$$\begin{aligned} \bar{f} \;:\; & A/\sim \longrightarrow B \\ & \bar{f}(K) := f(x), \quad \text{falls} \quad x \in K. \end{aligned}$$

Diese Zuordnung erfüllt die Bedingung, die für Abbildungen gefordert wird: Zunächst ist jedes $K \neq \emptyset$, es gibt also ein $x \in K$. Ferner wird jeder Klasse K genau ein Wert zugeordnet. Denn sind x, y irgendwelche Elemente aus K, so gilt

$$\begin{aligned} x, y \in K &\Longrightarrow x \sim y, \quad \text{da} \quad K \quad \sim-\text{Äquivalenzklasse}, \\ &\Longrightarrow f(x) = f(y), \quad \text{wegen (ii)} \quad . \end{aligned}$$

f ist also eine Abbildung.

f und $\bar{f} \circ \pi$ haben gleiche Definitions- und Wertebereiche, und für alle $x \in A$ gilt

$$\begin{aligned} \bar{f} \circ \pi(x) &= \bar{f}(\pi(x)) = \bar{f}([x]) \\ &= f(x), \quad \text{nach Konstruktion von} \quad \bar{f} \end{aligned}$$

Folglich ist $f = \bar{f} \circ \pi$.

1.5.9 Bemerkung

Im obigen Beweis wurden bei der Definition der Abbildung $\bar{f}$ die Äquivalenzklassen bewusst mit dem Buchstaben K (und nicht in der Form $[x]$) bezeichnet, um zu verdeutlichen: Wird bei der Definition einer Abbildung, deren Argumente Äquivalenzklassen sind, der Wert der einzelnen Äquivalenzklasse mit Hilfe eines ihrer Vertreter beschrieben, so <u>muss</u> nachgewiesen werden, dass dieser Wert unabhängig von der speziellen Wahl des Vertreters ist, d.h. dass man für je zwei Vertreter der gleichen Klasse das gleiche Ergebnis erhält. Nur dann ist die Abbildung, wie man sagt, *wohldefiniert*. In der allgemein üblichen Schreibweise, in der die obige Abbildung die Form

$$\begin{aligned} \bar{f} \ : \ & A/\sim \to B \\ & \bar{f}([x]) := f(x) \quad (\text{bzw.} \quad [x] \mapsto f(x)) \end{aligned}$$

hat, wird das allzu leicht übersehen [1.5.7(2)]! □

Zwischen Abbildungen und Äquivalenzrelationen besteht ein enger Zusammenhang. Jede Abbildung führt zu einer Äquivalenzrelation auf ihrem Definitionsbereich, indem man Argumente als äquivalent betrachtet, die auf das gleiche Element des Bildbereichs abgebildet werden (in des Wortes ursprünglichem Sinn also „gleichwertig“ sind).

1.5.10 Satz

$f : A \to B$ sei eine Abbildung. Definiert man für $x, y \in A$

$$x \sim y \mod R(f) :\Longleftrightarrow f(x) = f(y),$$

so ist die hierdurch gegebene Relation $R(f)$ eine Äquivalenzrelation auf A.
$R(f)$ heißt **die durch f induzierte Äquivalenzrelation** (auf A).

Beweis:
Für jedes $x \in A$ gilt $f(x) = f(x)$, also $x \sim x \bmod R(f)$. $R(f)$ ist also reflexiv.
Für alle $x, y \in A$ gilt:

$$x \sim y \bmod R(f) \Longrightarrow f(x) = f(y) \Longrightarrow f(y) = f(x) \Longrightarrow y \sim x \bmod R(f).$$

Also ist $R(f)$ symmetrisch.
Für alle $x, y, z \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} x \sim y \mod R(f) \quad \text{und} \quad y \sim z \mod R(f) &\Longrightarrow f(x) = f(y) \quad \text{und} \quad f(y) = f(z) \\ &\Longrightarrow f(x) = f(z) \Longrightarrow x \sim z \mod R(f). \end{aligned}$$

Also ist $R(f)$ transitiv. □

Jede Äquivalenzrelation kann andererseits als durch eine surjektive Abbildung induziert aufgefasst werden. Das folgt aus der Aussage der

1.5.11 Aufgabe

M sei eine Menge, R eine Äquivalenzrelation auf M und π_R die zu R gehörige kanonische Projektion. Zeigen Sie:
Die durch π_R induzierte Äquivalenzrelation $R(\pi_R)$ stimmt mit R überein. [→**L**]

Jede Abbildung lässt sich nach einem allgemeinen Verfahren, dessen Kern auf der Bildung von Äquivalenzklassen bezüglich der durch die Abbildung induzierten Äquivalenzrelation beruht, in ein Produkt aus einer Surjektion, einer Bijektion und einer Injektion zerlegen („faktorisieren“).

1.5.12 Satz

$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $R(f)$ die auf A durch f induzierte Äquivalenzrelation. Dann gilt:

(1) *Die kanonische Projektion*

$$\begin{aligned} \pi_{R(f)} \quad : \quad A &\longrightarrow A/R(f) \\ x &\longmapsto [x]_{R(f)} \end{aligned}$$

ist surjektiv.

(2) *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \tilde{f} \quad : \quad A/R(f) &\longrightarrow f(A) \\ [x]_{R(f)} &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

ist bijektiv.

(3) *Die Inklusionsabbildung*

$$\begin{aligned} in_{f(A),B} \quad : \quad f(A) &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

ist injektiv.

(4) *Es gilt $f = in_{f(A),B} \circ \tilde{f} \circ \pi_{R(f)}$.*
Diese Gleichung heißt die **kanonische Faktorisierung** (oder **kanonische Bildzerlegung)** von f.

Beweis:
(1) und (3) sind bereits früher bewiesen [1.5.5(4) bzw. 1.3.13] und hier nur des allgemeinen Zusammenhangs wegen aufgeführt.
(2): Für alle $x, y \in A$ gilt nach Definition von $R(f)$:

$$x \sim y \mod R(f) \Longrightarrow f(x) = f(y).$$

Also ist $\tilde{f}$ wohldefiniert(!).
$\tilde{f}$ ist surjektiv, denn ist $y \in f(A)$, so gibt es ein $a \in A$ mit $y = f(a)$ und für dieses gilt

$$\tilde{f}([a]_{R(f)}) = f(a) = y.$$

$\tilde{f}$ ist injektiv, denn für alle $x, y \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{f}([x]_{R(f)}) = \tilde{f}([y]_{R(f)}) &\implies f(x) = f(y) \quad \text{(Definition von } \tilde{f}) \\ &\implies x \sim y \bmod R(f) \quad \text{(Definition von } \quad R(f)) \\ &\implies [x]_{R(f)} = [y]_{R(f)} \quad [1.5.5(3)] \quad . \end{aligned}$$

(4) Beide Abbildungen haben A als Definitions- und B als Wertebereich, und für alle $a \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} in_{f(A),B} \circ \tilde{f} \circ \pi_{R(f)}(a) &= in_{f(A),B}(\tilde{f}([a]_{R(f)})) \\ &= in_{f(A),B}(f(a)) = f(a). \end{aligned}$$

□

Hat man auf einer Menge eine Äquivalenzrelation gegeben, so zeigt Satz 1.5.5, dass diese Menge sich (durch Bildung der Äquivalenzklassen) als Vereinigung nichtleerer Teilmengen, die paarweise disjunkt sind, darstellen lässt. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für Äquivalenzrelationen. Wir präzisieren zunächst:

1.5.13 Definition

M sei eine Menge. Eine Teilmenge $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{P}(M)$, der Potenzmenge von M, heißt **Partition** (auch: **disjunkte Zerlegung, Klasseneinteilung**) von M genau dann, wenn gilt:

(1) Für jedes $Z \in \mathfrak{Z}$ ist $Z \neq \emptyset$.

(2) Für alle $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$ gilt: $Z_1 \neq Z_2 \Rightarrow Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$.

(3) $M = \bigcup \mathfrak{Z} = \bigcup_{Z \in \mathfrak{Z}} Z$.

Der Zusammenhang zwischen Äquivalenzrelationen und Partitionen ergibt sich nun aus dem

1.5.14 Satz

M sei eine Menge.

(1) *$\mathfrak{Z}$ sei eine Partition auf M. Definiert man für $x, y \in M$*

$$x \sim y \bmod R(\mathfrak{Z}) :\iff \text{ Es gibt ein } Z \in \mathfrak{Z} \text{ mit } x \in Z \text{ und } y \in Z,$$

so gilt:

(a) *$R(\mathfrak{Z})$ ist eine Äquivalenzrelation auf M.*
$R(\mathfrak{Z})$ heißt die **von $\mathfrak{Z}$ induzierte Äquivalenzrelation.**

(b) *$M/R(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{Z}$, d.h. die zu $R(\mathfrak{Z})$ gehörige Klasseneinteilung stimmt mit $\mathfrak{Z}$ überein.*

(2) *R sei eine Äquivalenzrelation auf M. Dann gilt:*

(a) *M/R ist eine Partition auf M.*

(b) *$R(M/R) = R$, d.h. die von M/R induzierte Äquivalenzrelation ist wiederum R.*

Beweis:
(1)(a): Reflexivität: Sei $x \in M$. Wegen 1.5.13(3) gibt es ein $Z \in \mathfrak{Z}$ mit $x \in Z$. Also ist $x \sim x \bmod R(\mathfrak{Z})$.
Die Symmetrie von $R(\mathfrak{Z})$ ergibt sich unmittelbar aus der Definition von $R(\mathfrak{Z})$.
Transitivität: Seien $x, y, z \in M$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & x \sim y \bmod R(\mathfrak{Z}) \quad \text{und} \quad y \sim z \bmod R(\mathfrak{Z}) \\ & \quad \Longrightarrow \exists\, Z \in \mathfrak{Z} \quad \text{mit} \quad x, y \in Z \\ & \qquad \text{und es gibt ein} \quad W \in \mathfrak{Z} \quad \text{mit} \quad y, z \in W. \\ & \quad \Longrightarrow \exists\, Z \in \mathfrak{Z} \quad \text{mit} \quad x \in Z \quad \text{und} \quad z \in Z, \\ & \qquad \text{denn wegen} \quad y \in Z \cap W \quad \text{ist} \quad W = Z \quad [\text{nach } 1.5.13(2)] \quad . \\ & \quad \Longrightarrow x \sim y \bmod R(\mathfrak{Z}). \end{aligned}$$

(b): Wir zeigen zunächst: Ist $Z \in \mathfrak{Z}$ und $x \in Z$, so gilt $[x]_{R(\mathfrak{Z})} = Z$.
Für alle $y \in M$ gilt nämlich:

$$\begin{aligned} y \in [x]_{R(\mathfrak{Z})} & \iff y \sim x \mod R(\mathfrak{Z}) \\ & \iff \exists\, W \in \mathfrak{Z} \quad \text{mit} \quad y \in W \quad \text{und} \quad x \in W \\ & \iff y \in Z \qquad (x \in W \cap Z \neq \emptyset, \quad \text{also} \quad W = Z) \end{aligned}$$

Für jedes $x \in M$ gilt also $[x]_{R(\mathfrak{Z})} \in \mathfrak{Z}$, d.h. man hat $M/R(\mathfrak{Z}) \subset \mathfrak{Z}$.
Ist umgekehrt $Z \in \mathfrak{Z}$, so gibt es wegen $Z \neq \emptyset$ ein $x \in Z$, für dieses gilt nach obiger Rechnung $Z = [x]_{R(\mathfrak{Z})}$, also $Z \in M/R(\mathfrak{Z})$. Mithin gilt auch $\mathfrak{Z} \subset M/R(\mathfrak{Z})$.
(2)(a): Für jedes $x \in M$ gilt $x \in [x]_R \neq \emptyset$ [1.5.5(1)]. Für alle $x, y \in M$ gilt $[x]_R \neq [y]_R \Rightarrow [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ [1.5.5(3)(ii)⇒(iii)].
$M = \bigcup\{[x]_R \mid x \in M\}$ gilt nach 1.5.5(2).
(b): Für alle $x, y \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} x \sim y \mod R & \iff x \in [x]_R \quad \text{und} \quad y \in [x]_R \\ & \iff y \sim x \mod R(M/R). \end{aligned}$$

1.5.15 Folgerung

M sei eine Menge, $\mathfrak{Aeq}(M)$ sei die Menge der Äquivalenzrelationen auf M und $\mathfrak{Part}(M)$ die Menge der Partitionen von M. Dann gilt:
Die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi \ : \ \mathfrak{Aeq}(M) & \longrightarrow \mathfrak{Part}(M) \\ R & \longmapsto M/R \end{aligned}$$

ist eine Bijektion.

Beweis:
Nach 1.5.14(2a) ist ϕ eine Abbildung.

$$\begin{aligned} \psi \ : \ \mathfrak{Part}(M) & \longrightarrow \mathfrak{Aeq}(M) \\ \mathfrak{Z} & \longmapsto R(\mathfrak{Z}) \end{aligned}$$

ist nach 1.5.14(1a) eine Abbildung. Aus 1.5.14(1b),(2b) folgt, dass $\phi \circ \psi$ die Identität auf $\mathfrak{Part}(M)$ und $\psi \circ \phi$ die Identität auf $\mathfrak{Aeq}(M)$ ist. Folglich ist ψ bijektiv [1.3.30]. □

Eine weitere wichtige Art von Relationen auf einer Menge sind Ordnungsrelationen.

1.5.16 Definition

M sei eine Menge und R eine Relation auf M. R heißt **Ordnungsrelation** genau dann, wenn R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.
Ist R eine Ordnungsrelation auf M, so nennt man das Paar (M, R) eine **geordnete Menge** und R eine **Ordnung** auf M.

1.5.17 Beispiele

(1) $R := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ und } x \leq y\}$ ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ [1.4.22(1)]. Man nennt diese Ordnung die **natürliche Ordnung**. Unter der natürlichen Ordnung auf $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{N}$ versteht man dementsprechend die Einschränkung dieser Ordnung R auf bzw. $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$.

(2) $R := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ und } x \mid y\}$ ist eine Ordnung auf $\mathbb{N}$ [1.4.22(3)].

(3) Ist M eine Menge, so ist die Inklusion eine Ordnung auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ [1.4.22(4)].

1.5.18 Aufgabe

M sei eine Menge, R eine Relation auf M und R^{-1} die Umkehrrelation von R.
Zeigen Sie:
R^{-1} ist genau dann eine Ordnungsrelation, wenn R eine Ordnungsrelation ist. [→**L**]

1.5.19 Bemerkung

Ordnungsrelationen werden üblicherweise mit dem Zeichen $\leq$ (lies: kleiner oder gleich) bezeichnet. $(M, \leq)$ ist also genau dann eine geordnete Menge, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt:

(S) $x \leq x$.

(T) $x \leq y$ und $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$.

(A-S) $x \leq y$ und $y \leq x \Longrightarrow x = y$.

Beim Rechnen in geordneten Mengen verwendet man folgende praktische Abkürzungen:

1.5.20 Definition

$(M, \leq)$ sei eine Menge. Für $x, y \in M$ definiert man:

$$\begin{array}{lll} x < y & :\Longleftrightarrow & x \leq y \quad \text{und} \quad x \neq y \quad (\text{„(echt) kleiner“}) \\ x \geq y & :\Longleftrightarrow & y \leq x \quad (\text{„größer oder gleich“}) \\ x > y & :\Longleftrightarrow & y < x \quad (\text{„(echt) größer“}) \end{array}$$

Ausdrücke der Form $x \leq y, x < y, x \geq y, x > y$ nennt man **Ungleichungen**.
Man nennt x und y **(bzgl. $\leq$) vergleichbar**, wenn $x \leq y$ oder $x \geq y$ gilt.

1.5.21 Bemerkung

Die Wahl des Zeichens $\leq$ für Ordnungsrelationen ist zurückzuführen auf die Bezeichnung der natürlichen Ordnung der reellen Zahlen. Die Vergleichbarkeit beliebiger Elemente, die in $(\mathbb{R}, \leq)$ gegeben ist, ist aber eine zusätzliche Eigenschaft, die für beliebige Ordnungen $(M, \leq)$ nicht erfüllt zu sein braucht (z.B. gilt in der im Beispiel 1.5.17(2) gegebenen Ordnung weder $3|5$ noch $5|3$).

1.5.22 Definition

$(M, \leq)$ sei eine geordnete Menge.

(1) $(M, \leq)$ heißt eine **linear geordnete Menge,** genau dann, wenn $\leq$ eine lineare Ordnung ist, d.h. wenn für alle $x, y \in M$ gilt

$$x \leq y \quad \text{oder} \quad y \leq x.$$

(wenn also je zwei Elemente aus M bzgl. $\leq$ vergleichbar sind).
In der Literatur bezeichnet man eine lineare Ordnung auch als **vollständige Ordnung** oder als **Totalordnung.**

(2) Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt **linear geordnet** (oder eine **Kette** (in M)), wenn $(N, \leq /N)$ [1.4.14] eine linear geordnete Menge ist.

1.5.23 Beispiel

Für $M := \{1, 2, 3\}$ veranschaulichen wir uns die geordnete Menge $(\mathfrak{P}(M), \subset)$ durch ein Diagramm, in dem für $U, V \subset M$ die Inklusion $U \subset V$ durch einen Pfeil $U \to V$ dargestellt wird und zwecks besserer Übersichtlichkeit Inklusionen, die sich aus dem Transitivitätsgesetz ergeben, fortgelassen sind:

$$\begin{tikzcd}
 & \{1,2,3\} & \\
\{1,2\} \arrow[ur] & \{1,3\} \arrow[u] & \{2,3\} \arrow[ul] \\
\{1\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{3\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Diese Ordnung ist nicht linear, da (z.B.) $\{1, 2\}$ und $\{1, 3\}$ nicht vergleichbar sind. Eine linear geordnete Teilmenge ist (z.B.) $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$, ihr entspricht die Inklusionskette $\emptyset \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$. □

Eine systematische Theorie der Ordnungsrelationen ist nicht Gegenstand dieses Kurses, eine genaue Kenntnis der folgenden Begriffe ist jedoch unerlässlich:

1.5.24 Definition

$(M, \leq)$ sei eine geordnete Menge und $N \subset M$ eine Teilmenge und $x \in M$.

(1) x heißt **Maximum** oder **größtes Element** von N genau dann, wenn gilt:

(i) $x \in N$.
(ii) Für alle $y \in N$ gilt: $y \leq x$.

(1') x heißt **Minimum** oder **kleinstes Element** von N genau dann, wenn gilt:

(i) $x \in N$.
(ii) Für alle $y \in N$ gilt: $x \leq y$.

(2) x heißt **maximales Element** von N genau dann, wenn gilt:

(i) $x \in N$.
(ii) Für alle $y \in N$ gilt: $(x \leq y \Rightarrow y = x)$.

(2') x heißt **minimales Element** von N genau dann, wenn gilt:

(i) $x \in N$.
(ii) Für alle $y \in N$ gilt: $(y \leq x \Rightarrow y = x)$.

(3) x heißt **obere Schranke** von N (in M) genau dann, wenn für alle $y \in N$ gilt: $y \leq x$.

(3') x heißt **untere Schranke** von N (in M) genau dann, wenn für alle $y \in N$ gilt: $y \geq x$.

(4) Existiert eine obere Schranke von N, so sagt man, dass N **nach oben beschränkt** ist.
Existiert eine untere Schranke von N, so sagt man, dass N **nach unten beschränkt** ist.
N heißt **beschränkt**, wenn N nach oben und nach unten beschränkt ist.

1.5.25 Bemerkung

(1) Im folgenden beschränken wir uns darauf, Bezeichnungen zwischen den Begriffen Maximum, maximales Element und obere Schranke zu diskutieren, da sich entsprechende Aussagen über Minimum, minimales Element und untere Schranke auf naheliegende Weise ergeben. Dementsprechend fassen wir bisweilen zwei Aussagen mit Hilfe spitzer Klammern $\langle , \rangle$ in einem Satz zusammen. Dieser ist dann einmal ohne den Inhalt der Klammern zu lesen, die zweite Aussage erhalten Sie, indem Sie simultan den Ausdruck vor der Klammer durch den in der Klammer stehenden ersetzen.

(2) Ein größtes Element von N ist nach Definition auch eine obere Schranke von N; eine obere Schranke von N ist aber nur dann ein größtes Element von N, wenn sie in N liegt.

(3) Die Bedingung (1)(ii) in 1.5.24 („Jedes Element von N ist kleiner oder gleich x“) ist deshalb nicht gleichwertig zu (2)(ii) („Es gibt in N kein Element, das echt größer ist als x“), weil es in N Elemente geben kann, die mit x gar nicht vergleichbar sind. Es gilt aber der

1.5.26 Satz

$(M, \leq)$ sei eine geordnete Menge, $N \subset M$ eine Teilmenge von M und $x \in M$. Dann gilt:

(1) *x ist Maximum <Minimum> von $N \Rightarrow x$ ist maximales <minimales> Element von N, und x ist dann das einzige maximale <minimale> Element von N.*

(2) *Ist N eine linear geordnete Teilmenge von M, so gilt: x ist maximales <minimales> Element von $N \Rightarrow x$ ist Maximum <Minimum> von N.*

(3) *N besitzt höchstens ein Maximum <Minimum>.*

Beweis:
(1): Sei x Maximum von N. Dann ist $x \in N$. Ist $y \in N$ und $y \geq x$, so gilt $y \geq x$ *und* $y \leq x$ (weil x Maximum ist), also $y = x$ aufgrund der Antisymmetrie. x ist also maximales Element von N.
Ist z maximales Element von N, so ist $z \in N$ und damit $z \leq x$, da x größtes Element von N ist. Wegen $x \in N$ folgt hieraus $z = x$ nach 1.5.24(2)(ii).
(2): Sei x maximales Element von N. Dann ist $x \in N$. Für jedes $y \in N$ gilt dann $y \leq x$ oder $x \leq y$, da N linear geordnet ist. Aus $x \leq y$ folgt $x = y$, da x maximales Element von N ist. Also gilt für jedes $y \in N$ $\;y \leq x$, d.h. x ist größtes Element von N.
(3) folgt aus (1), man kann es aber auch direkt aus der Antisymmetrie folgern: Sind x und y größte Elemente von N, so folgt wegen $x, y \in N$ $\;y \leq x$ und $x \leq y$, also $x = y$.

Die Beweise für die entsprechenden Aussagen über Minima/minimale Elemente überlassen wir Ihnen zur Übung. [$\rightarrow$**L**]

1.5.27 Definition

$(M, \leq)$ sei eine geordnete Menge und $N \subset M$ eine Teilmenge von M.
Existiert ein größtes <kleinstes> Element von N, so bezeichnet man dieses nach 1.5.26(3) eindeutig bestimmte Element aus N mit

$$\max N \langle \min N \rangle.$$

Ausdrücklich sei darauf hingewiesen: $\max N$ (bzw. $\min N$) ist i.a. nicht für beliebige Teilmengen von M definiert. Die in der Definition genannte Prämisse muss erfüllt sein!

1.5.28 Beispiele

(1) M sei eine Menge und $(\mathfrak{P}(M), \subset)$ die durch Inklusion geordnete Potenzmenge von M 1.5.17(3). Dann ist $\max \mathfrak{P}(M) = M$ und $\min \mathfrak{P}(M) = \emptyset$.

(2) In $(\mathbb{R}, \leq)$ sei $\leq$ die natürliche Ordnung und

$$N := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Es ist $\max N = 1$, aber $\min N$ ist nicht definiert. Zwar ist N nach unten beschränkt ($0 \leq x$ für alle $x \in N$), aber N besitzt kein kleinstes Element, nicht einmal ein minimales Element, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $n < n + 1$, also $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, so dass es zu jedem Element aus N ein echt kleineres Element in N gibt.

(3) Es sei $M := \mathbb{N}$ und $|$ die durch die Teilbarkeit auf $\mathbb{N}$ gegebene Ordnung [1.5.17(2)]. Für $N_1 := \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt: N_1 ist nach unten beschränkt (1 ist untere Schranke), aber $\min N_1$ ist nicht definiert, denn N_1 besitzt kein kleinstes Element. N_1 besitzt unendlich viele minimale Elemente: jede Primzahl p ist minimal, denn es gibt zu keiner Primzahl p ein Element $x \in N_1$ mit $x|p$. Nach oben ist N_1 nicht beschränkt (also ist auch $\max M_1$ nicht definiert), und es gibt kein maximales Element in N_1, da für jedes $x \in N_1$ gilt: $2x \in N_1$, $x|2x$ und $x \neq 2x$.
Wählt man $N_2 := \{2, 4, 5\} \cup \{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, so ist N_2 nicht nach oben beschränkt, $\max N_2$ ist also nicht definiert. 4 ist maximales Element von N_2, 2 und 3 sind minimale Elemente. $\min N_2$ ist also nicht definiert, denn wenn ein kleinstes Element existiert, ist es das einzige minimale Element [1.5.26(2)]. 5 ist minimales und maximales Element in N_2.

1.5.29 Bemerkung

Die Frage, ob eine Teilmenge N einer geordneten Mengen $(M, \leq)$ ein Maximum oder Minimum bzw. maximale oder minimale Elemente besitzt, lässt sich i.a. nicht leicht entscheiden. Enthält N nur endlich viele Elemente, so ist das – wenigstens im Prinzip – kein Thema: man kann ja z.B. zu jedem $x \in N$ prüfen, ob es unter den (endlich vielen!) Elementen in N ein größeres gibt: wenn nicht, ist x maximal. Bei unendlichen Teilmengen kann man natürlich so nicht verfahren.
Zur Frage der Existenz maximaler Elemente in einer geordneten Menge gibt es ein „klassisches“ Kriterium, das in der Literatur als „Zornsches Lemma“ bekannt ist, benannt nach dem Mathematiker Max Zorn (1906–1993):

1.5.30 Zornsches Lemma

$(M, \leq)$ sei eine geordnete Menge.
Besitzt jede linear geordnete Teilmenge von M eine obere Schranke in M, so existiert in M ein maximales Element.

Ein Beweis dieses Lemmas ist mit dem bisher in diesem Kurs behandelten Stoff nicht möglich, und die Bereitstellung der dazu erforderlichen Mittel würde den Rahmen dieser Einführung sprengen.
Der interessierte Leser findet eine eingehendere Diskussion dieses Themas in den Kapiteln 2.8, 4.5 und 4.6 des Kurses „Naive Mengenlehre“ (Stichworte: Auswahlaxiom, Wohlordnungssatz, Zornsches Lemma).
Im vorliegenden Kurs wird das Zornsche Lemma lediglich an einer, allerdings prinzipiell wichtigen Stelle verwendet: beim Nachweis der Existenz von Basen in beliebigen Vektorräumen.

1.6 Vollständige Induktion

Wie zu Beginn des Kurses gesagt, nehmen wir die natürlichen Zahlen als gegeben an und setzen ihre elementaren Eigenschaften als bekannt voraus. Zu diesen zählen wir neben den Gesetzen der Addition, Multiplikation, Teilbarkeit und der natürlichen Anordnung auch das

1.6.1 Prinzip vom kleinsten Element

Für die natürliche Ordnung auf $\mathbb{N}$ *gilt:*
Zu jeder nichtleeren Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ *existiert* $\min M$.

Da wir auf eine axiomatische Einführung der natürlichen Zahlen verzichtet haben, können wir diese Aussage nicht beweisen, ihre Gültigkeit sollte aber hinreichend plausibel sein: Ist die Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ nicht leer, so gibt es ein $a \in M$, und das kleinste Element der endlichen (und linear geordneten) Menge $M \cap \mathbb{N}_a$ ist aufgrund der Transitivität das kleinste Element von M. □

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit dem Problem befassen, wie man beweist, dass eine Aussage für alle natürlichen Zahlen wahr ist. Sei z.B. für $a_n := 2^{n+1} + 3^{2n-1}$ die Aussage „Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist a_n durch 7 teilbar“ zu beweisen. Wohl jeder wird zunächst die Behauptung für die ersten Indizes „testen“ : $a_1 = 4 + 3 = 7$,
$a_2 = 8 + 27 = 35 = 5 \cdot 7$, $a_3 = 16 + 243 = 259 = 37 \cdot 7, \ldots$ und die Behauptung für diese Werte bestätigt finden. Je weiter er rechnet, desto größer wird die Bereitschaft, an die Richtigkeit der Aussage zu glauben, aber – wie weit er rechnet – ein Beweis der obigen Aussage wird nicht daraus, auch nicht durch den Zusatz „usw.“ .
Die Lösung für das aufgezeigte Problem basiert auf dem grundlegenden

1.6.2 Prinzip der vollständigen Induktion

$\mathcal{E}$ sei eine für natürliche Zahlen sinnvolle Eigenschaft (d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ stehe prinzipiell fest, ob $\mathcal{E}$ auf n zutrifft oder nicht), *für die gilt:*

(i) *$\mathcal{E}$ trifft auf 1 zu.*

(ii) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Trifft $\mathcal{E}$ auf n zu, so trifft $\mathcal{E}$ auch auf $n + 1$ zu.*

Dann trifft $\mathcal{E}$ auf jede natürliche Zahl zu.

1.6.3 Bemerkung

(1) Anschaulich ist die Aussage dieses Prinzips plausibel, besagt doch (ii): Immer wenn die Eigenschaft $\mathcal{E}$ auf eine Zahl zutrifft, trifft sie auch auf die nächste zu. Trifft also $\mathcal{E}$ auf 1 zu, so auch auf 2, damit auf 3 etc., und man kann so für jede natürliche Zahl k in endlich vielen „Schritten“ nachweisen, dass $\mathcal{E}$ auf k zutrifft.

(2) Auf den ersten Blick erscheint das Prinzip der vollständigen Induktion komplizierter als das Prinzip vom kleinsten Element. Es mag daher überraschen, dass beide äquivalent sind. Setzt man die Gültigkeit von 1.6.1 voraus, so erhält man 1.6.2 wie folgt:
$\mathcal{E}$ sei eine Eigenschaft natürlicher Zahlen, die den Bedingungen (i) und (ii) aus 1.6.2 genügt. Angenommen, $\mathcal{E}$ trifft nicht auf alle natürlichen Zahlen zu, so ist die Menge

$$U := \{n \mid n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \mathcal{E} \quad \text{trifft auf} \quad n \quad \text{nicht zu} \quad \}$$

nicht leer.
Nach 1.6.1 existiert $a := \min U$. Wegen $a \in U$ trifft $\mathcal{E}$ auf a nicht zu. Folglich muss $a \neq 1$ sein, denn nach (i) trifft $\mathcal{E}$ auf 1 zu. Wegen $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist also $a - 1 \in \mathbb{N}$, und $\mathcal{E}$ trifft auf $a - 1$ zu, da a die kleinste natürliche Zahl ist, auf die $\mathcal{E}$ nicht zutrifft. $\mathcal{E}$ trifft also auf $a - 1$ zu, aber nicht auf a. Das ist unmöglich! Denn $\mathcal{E}$ genügt nach Voraussetzung der Bedingung (ii), und die besagt speziell (nämlich für $n := a - 1 \in \mathbb{N}$): Wenn $\mathcal{E}$ auf $a - 1$ zutrifft, so trifft $\mathcal{E}$ auch auf a zu.
Unsere Annahme, dass es eine natürliche Zahl gibt, auf die $\mathcal{E}$ nicht zutrifft, führt zu einem Widerspruch. $\mathcal{E}$ trifft also auf jede natürliche Zahl zu (was zu zeigen war). □

Bevor wir zeigen, wie umgekehrt 1.6.1 aus 1.6.2 folgt, formulieren wir zunächst mit Hilfe des Mengenbegriffs das zum Prinzip der vollständigen Induktion äquivalente

1.6.4 Induktionsaxiom

M sei eine Teilmenge der natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(i) $1 \in M$.

(ii) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$.*

Dann ist $M = \mathbb{N}$.

1.6.5 Bemerkung

(1) Die Gültigkeit dieser Aussage ergibt sich aus dem Prinzip der vollständigen Induktion wie folgt: $M \subset \mathbb{N}$ erfülle die Bedingungen (i) und (ii) aus 1.6.4. Man definiere die Eigenschaft $\mathcal{E}$ natürlicher Zahlen durch die Festlegung:
$\mathcal{E}$ trifft auf n zu $:\Longleftrightarrow n \in M$.
Wegen $1 \in M$ trifft dann $\mathcal{E}$ auf 1 zu, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \text{ trifft auf } n \text{ zu} \quad &\Rightarrow n \in M \quad [\text{Def. von } \mathcal{E}] \\ &\Rightarrow n + 1 \in M \quad [1.6.4(\text{ii})] \\ &\Rightarrow \mathcal{E} \text{ trifft auf } n + 1 \text{ zu.} \end{aligned}$$

$\mathcal{E}$ erfüllt also die Voraussetzungen aus 1.6.2, so dass $\mathcal{E}$ auf jede natürliche Zahl zutrifft.
Es gilt also $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in M$, d.h. $\mathbb{N} \subset M$. Da $M \subset \mathbb{N}$ vorausgesetzt war, erhält man die Behauptung: $M = \mathbb{N}$.

(2) Aus 1.6.4 lässt sich nun wiederum das Prinzip vom kleinsten Element herleiten (und damit ist nach (1) und 1.6.3(2) auch klar, dass die Aussagen 1.6.1,1.6.2 und 1.6.4 untereinander äquivalent sind):
Angenommen, $M \subset \mathbb{N}$ ist eine Teilmenge natürlicher Zahlen, die kein kleinstes Element besitzt. Sei $U(M) := \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und für alle } m \in M \text{ ist } m \geq n\}$ (d.h. $U(M)$ ist die Menge der unteren Schranken von M in $\mathbb{N}$). Dann ist $M \cap U(M) = \emptyset$, denn ein Element $a \in M \cap U(M)$ wäre nach Definition 1.5.24(1') ein kleinstes Element von M. $U(M)$ erfüllt nun die Voraussetzungen aus 1.6.4: $U(M) \subset \mathbb{N}$ gilt nach Definition von $U(M)$. $1 \in U(M)$ gilt, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n \geq 1$. Schließlich

gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n \in U(M) \quad &\Longrightarrow \quad \text{Für alle} \quad m \in M \quad \text{ist} \quad m \geq n \quad (\text{Definition von} \quad U(M)) \\ &\Longrightarrow \quad \text{Für alle} \quad m \in M \quad \text{ist} \quad m \geq n \quad \text{und} \quad m \neq n \\ &\qquad\;\; (\text{wegen} \quad M \cap U(M) = \emptyset) \\ &\Longrightarrow \quad \text{Für alle} \quad m \in M \quad \text{ist} \quad m \geq n+1 \\ &\Longrightarrow \quad n+1 \in U(M) \end{aligned}$$

Nach 1.6.4 ist also $U(M) = \mathbb{N}$ und folglich $\emptyset = M \cap U(M) = M \cap \mathbb{N} = M$. Jede *nichtleere* Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt also ein kleinstes Element.

(3) Die Bezeichnung Induktions*axiom* (laut DUDEN ist ein Axiom ein „keines Beweises bedürfender Grundsatz“) sollte Sie nicht irritieren.
Sie ist hier lediglich mit aufgeführt, weil im Rahmen eines systematischen Aufbaus üblicherweise die Aussage 1.6.4 Teil des Axiomensystems für die natürlichen Zahlen ist und dort diesen Namen trägt.

1.6.6 Beweise mit vollständiger Induktion

Gegeben sei eine Aussage (besser: Aussageform) $\mathcal{A}(n)$ mit n als freiem Parameter für natürliche Zahlen (in unserem obigen Beispiel etwa $\mathcal{A}(n) :=$ „$2^{n+1} + 3^{2n-1}$ ist durch 7 teilbar“). Ein Beweis der Aussage „Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{A}(n)$ wahr“ mit vollständiger Induktion nach n (abgekürzt: $Ind(n)$) besteht dann aus zwei Teilen:

(1) dem **Induktionsanfang** (oder: **Induktionsbeginn**), das ist der Nachweis, dass $\mathcal{A}(1)$ wahr ist.

(2) dem **Induktionsschritt** (oder: **Schluss von** n **auf** $n+1$), das ist der Nachweis, dass die Implikation

$$\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$$

mit $n \in \mathbb{N}$ als freiem Parameter gültig ist.
Hierzu zeigt man: Ist $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl, für die $\mathcal{A}(n)$ gilt, so gilt für dieses n auch $\mathcal{A}(n+1)$.
Die Prämisse der Implikation „$\mathcal{A}(n)$ ist wahr $\Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$ ist wahr“ nennt man die **Induktionsvoraussetzung** (oder: **Induktionsannahme**), die Konklusion **Induktionsbehauptung**.
Die Gültigkeit der Aussage „Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{A}(n)$ wahr“ ergibt sich dann aus der Tatsache, dass die durch

$$\mathcal{E} \quad \text{trifft auf} \quad n \quad \text{zu} \quad :\Longleftrightarrow \mathcal{A}(n) \quad \text{ist wahr}$$

definierte Eigenschaft nach dem Prinzip der vollständigen Induktion auf alle natürlichen Zahlen zutrifft.
(Alternativ aus dem Induktionsaxiom, aus dem folgt, dass für die Menge $U := \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } \mathcal{A}(n) \text{ ist wahr }\}$ wegen (1) und (2) $\mathbb{N} = U$ gilt.)

1.6.7 Beispiel

Als Beispiel für einen Beweis mit vollständiger Induktion zeigen wir:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n := 2^{n+1} + 3^{2n-1}$ durch 7 teilbar.
Beweis($Ind(n)$):

$\underline{n=1}$ (Induktionsanfang):
Es ist $a_1 = 2^{1+1} + 3^{2-1} = 4 + 3 = 7$, also ist a_1 durch 7 teilbar.
$\underline{n \mapsto n+1 (n \geq 1)}$ (Induktionsschritt):
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2^{(n+1)+1} + 3^{2(n+1)-1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} + 3^2 \cdot 3^{2n-1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} + 9 \cdot 3^{2n-1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} + (7+2) \cdot 3^{2n-1} \\ &= 7 \cdot 3^{2n-1} + 2(2^{n+1} + 3^{2n-1}) \\ &= 7 \cdot 3^{2n-1} + 2a_n \end{aligned}$$

Wenn also a_n durch 7 teilbar ist, so ist auch $2a_n$ durch 7 teilbar und damit auch a_{n+1} als Summe zweier durch 7 teilbarer Zahlen.
[In der allgemein üblichen Terminologie sagt man stattdessen: Nach Induktionsvoraussetzung ist a_n durch 7 teilbar, also ist es auch a_{n+1} als Summe zweier durch 7 teilbarer Zahlen (und das ist die Induktionsbehauptung)]
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist also für alle $n \in \mathbb{N}$ $2^{n+1} + 3^{2n-1}$ durch 7 teilbar. $\square$

Ein weiteres Beispiel ist der Beweis für folgenden (inhaltlich zum vorigen Abschnitt gehörenden)

1.6.8 Satz

$(M, \leq)$ sei eine endliche geordnete Menge, $M \neq \emptyset$. Dann existiert in M ein minimales und ein maximales Element.

Beweis:
Wir zeigen die Existenz eines maximalen Elements durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Elemente von M (D.h. wir beweisen die Aussage
$\mathcal{A}(n) :=$ „Jede geordnete Menge M mit $|M| = n$ besitzt ein maximales Element“
durch vollständige Induktion nach n).
$\underline{n=1}$:
Ist $M = \{a\}$ eine geordnete Menge, so ist a maximales Element.
$\underline{n \longmapsto n+1 (n \geq 1)}$:
M sei eine geordnete Menge mit $|M| = n+1$. Sei $a \in M$. Wegen $n \geq 1$ ist $M' := M \setminus \{a\}$ nicht leer, und es ist $(M', \leq /M')$ eine geordnete Menge mit $|M'| = n$.
Nach Induktionsvoraussetzung existiert in M' ein maximales Element b.
Ist $b \leq a$, so ist a maximales Element in M, andernfalls ist b maximales Element in M. M besitzt also ein maximales Element.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage $\mathcal{A}(n)$ also für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.
Die Existenz minimaler Elemente erhält man hieraus wie folgt:
Sei $\leq'$ die Umkehrrelation von $\leq$, d.h. für alle $x, y \in M$ ist $x \leq' y :\Longleftrightarrow x \geq y$. Dann ist $\leq'$ eine Ordnung auf M [1.5.18]. Also existiert nach dem soeben Gezeigten ein maximales Element bzgl. der Ordnung $\leq'$ in M. Dieses ist ein minimales Element bezüglich der Ordnung $\leq$.

1.6.9 Aufgabe

Beweisen Sie:
Ist M eine endliche Menge, so ist auch $\mathfrak{P}(M)$ endlich, und es gilt

$$|\mathfrak{P}(M)| = 2^{|M|}. \qquad [\to \mathbf{L}]$$

Das in 1.6.2 formulierte Prinzip der vollständigen Induktion wird häufig in modifizierter Form angewendet. Neben der von einigen Autoren bevorzugten Wahl von $n-1$ statt n als Parameter in der Formulierung des Induktionsschrittes (Schluss von $n-1$ auf n für $n>1$) sind hier die beiden folgenden Varianten zu nennen:

1.6.10 Satz (Vollständige Induktion mit beliebigem Induktionsbeginn)

$\mathcal{E}$ sei eine für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}^0$ sinnvolle Eigenschaft und $n_0 \in \mathbb{N}^0$.
$\mathcal{E}$ erfülle die Bedingungen:

(i) *$\mathcal{E}$ trifft auf n_0 zu.*

(ii) *Für alle $n \in \mathbb{N}^0$ mit $n \geq n_0$ gilt: Trifft $\mathcal{E}$ auf n zu, so trifft $\mathcal{E}$ auch auf $n+1$ zu.*

Dann trifft $\mathcal{E}$ auf jede natürliche Zahl zu, die größer oder gleich n_0 ist.

Beweis:
$\mathcal{E}'$ sei für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch:
$\mathcal{E}'$ trifft auf n zu $:\iff$ $\mathcal{E}$ trifft auf $(n_0 - 1 + n)$ zu. Aus (i) und (ii) folgt, dass $\mathcal{E}'$ die Voraussetzungen aus 1.6.2 erfüllt und somit auf alle natürlichen Zahlen zutrifft. Damit gilt $\mathcal{E}$ für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}^0$, die größer oder gleich n_0 sind.

1.6.11 Satz (Starkes Prinzip der vollständigen Induktion oder Vollständige Induktion mit erweiterter Induktionsvoraussetzung)

$\mathcal{E}$ sei eine für natürliche Zahlen sinnvolle Eigenschaft, die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) *$\mathcal{E}$ trifft auf 1 zu.*

(ii) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Trifft $\mathcal{E}$ auf alle natürlichen Zahlen k mit $k \leq n$ zu, so trifft $\mathcal{E}$ auch auf $n+1$ zu.*

Dann trifft $\mathcal{E}$ auf jede natürliche Zahl zu.

Beweis:
$\mathcal{E}'$ sei für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch:
$\mathcal{E}'$ trifft auf n zu $:\iff$ $\mathcal{E}$ trifft auf alle natürlichen Zahlen $k \in \mathbb{N}_n$ zu.
Nach (i) gilt dann $\mathcal{E}'$ für 1, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}' \text{ gilt für } n &\iff \text{Für alle } k \in \mathbb{N}_n \text{ gilt } \mathcal{E} \\
&\implies \mathcal{E} \text{ gilt für alle } k \in \mathbb{N}_{n+1} \quad (\text{da } \mathcal{E} \text{ die Bedingung (ii) erfüllt.}) \\
&\iff \mathcal{E}' \text{ gilt für } n+1.
\end{aligned}$$

$\mathcal{E}'$ erfüllt also die Voraussetzungen aus 1.6.2, folglich gilt $\mathcal{E}'$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen $n \in \mathbb{N}_n$ trifft also $\mathcal{E}$ auf jede natürliche Zahl zu.

1.6.12 Bemerkung

Das Induktionsprinzip wird nicht nur bei Beweisen angewendet, auf ihm beruht auch die Möglichkeit, Folgen rekursiv zu definieren. Ein Beispiel: Der Beweis von 1.6.7 basierte auf den Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 &= 7 \\ a_{n+1} &= 2a_n + 7 \cdot 3^{2n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

denen die durch $a_n := 2^{n+1} + 3^{2n-1}$ definierte Folge genügte.
Der folgende Satz wird zeigen, dass es keine andere Folge gibt, die obigen Bedingungen genügt. Man könnte also die Folge $(2^{n+1} + 3^{2n-1} \mid n \in \mathbb{N})$ durch die Festlegung

$$(*) \qquad a_1 := 7$$

$$(**) \qquad a_{n+1} := 2a_n + 7 \cdot 3^{2n-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

definieren.
Anschaulich hat man also a_n „Schritt für Schritt“ definiert, indem man zunächst a_1 definiert und für größeres n jeweils auf bereits Definiertes zurückgreift (recurrere = lat. zurücklaufen).
Dieses ist ein Beispiel für eine **rekursive Definition**, (*) ist dabei der **Anfangswert**, (**) die **Rekursionsformel**.
$a_n = 2^{n+1} + 3^{2n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist die **explizite Darstellung der** durch (*),(**) **rekursiv definierten Folge**.

1.6.13 Satz (Rekursionsprinzip)

X sei eine Menge, $g : X \times \mathbb{N} \longrightarrow X$ eine Abbildung und $a \in X$. Dann gibt es genau eine Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f(1) = a$.
(ii) $f(n+1) = g(f(n), n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

[Hier schreiben wir einfach $g(m,n)$ statt $g((m,n))$]

Beweis:
Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit: Seien $f_1, f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow X$ Abbildungen, die den Bedingungen (i) und (ii) genügen. Für $U := \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } f_1(n) = f_2(n)\}$ gilt dann $1 \in U$ (wegen (i)) und für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n \in U &\Longrightarrow f_1(n) = f_2(n) \\ &\Longrightarrow f_1(n+1) = g(f_1(n), n) = g(f_2(n), n) = f_2(n+1), \\ &\qquad \text{da (ii) für } f_1 \text{ und } f_2 \text{ gilt }, \\ &\Longrightarrow n+1 \in U. \end{aligned}$$

Nach 1.6.4 folgt $U = \mathbb{N}$, also gilt $f_1 = f_2$.
Zum Nachweis der Existenz einer solchen Abbildung f beweisen wir zunächst mit vollständiger Induktion:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine Abbildung $f_n : \mathbb{N}_n \to X$, die den folgenden Bedingungen genügt:

$(i)_n$ $f_n(1) = a.$

$(ii)_n$ *Für alle* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $k < n$ *gilt:* $f_n(k+1) = g(f_n(k), k)$.

<u>$n = 1$</u>:
$f_1 : \mathbb{N}_1 \to X$, $f_1(1) := a$ ist die einzige Abbildung, die $(i)_n$ erfüllt ($(ii)_n$ ist erfüllt, weil es kein $k \in \mathbb{N}$ mit $k < 1$ gibt).
<u>$n \longmapsto n + 1 (n \geq 1)$</u>:
Man mache sich zunächst klar:
Für jedes $h \in \text{Abb}(\mathbb{N}_{n+1}, X)$ gilt:
h erfüllt $(i)_{n+1}$ und $(ii)_{n+1}$ $\iff$ $h/\mathbb{N}_n$ erfüllt $(i)_n, (ii)_n$ und $h(n+1) = g(h(n), n)$.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es genau ein $f_n \in \text{Abb}(\mathbb{N}_n, X)$, das $(i)_n$ und $(ii)_n$ erfüllt.
Zu zeigen ist: Es gibt genau ein $f_{n+1} \in \text{Abb}(\mathbb{N}_{n+1}, X)$, das $(i)_{n+1}$ und $(ii)_{n+1}$ genügt.
Eindeutigkeit: Wenn es überhaupt ein solches f_{n+1} gibt, so muss (s.o. „$\Rightarrow$") $f_{n+1}/\mathbb{N}_n = f_n$ sein (da f_n eindeutig ist) und $f_{n+1}(n+1) = g(f_n(n), n)$ (wegen $f_{n+1}(n) = f_n(n)$). Es gibt also höchstens eine Abbildung f_{n+1} mit der verlangten Eigenschaft.
Existenz: Die Abbildung

$$f_{n+1} : \mathbb{N}_{n+1} \longrightarrow X$$

$$f_{n+1}(k) := \begin{cases} f_n(k), & \text{falls } 1 \leq k \leq n \\ g(f_n(n), n), & \text{falls } k = n+1 \end{cases}$$

ist wohldefiniert. Es gilt $f_{n+1}/\mathbb{N}_n = f_n$, also auch $g(f_n(n), n) = g(f_{n+1}(n), n)$, und aus beidem folgt (s.o. „$\Leftarrow$"), dass f_{n+1} den Bedingungen $(i)_{n+1}$ und $(ii)_{n+1}$ genügt. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt also obige Aussage.

Mit Hilfe der Abbildungen $f_n (n \in \mathbb{N})$ definiert man nun die Abbildung

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{N} \to X \\ & n \longmapsto f_n(n). \end{aligned}$$

Diese Abbildung erfüllt die Bedingungen des Satzes: $f(1) = f_1(1) = a$, und für $n \geq 1$ ist

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f_{n+1}(n+1) = g(f_{n+1}(n), n)) \\ &= g(f_n(n), n) \qquad (\text{wegen} \quad f_{n+1}/\mathbb{N} = f_n) \\ &= g(f(n), n). \end{aligned}$$

□

Einen ersten Eindruck von der grundlegenden Bedeutung des Rekursionsprinzips möchten wir Ihnen vermitteln, wenn wir im folgenden die Definitionen einiger Ihnen vertrauter, aber vermutlich nur mit Hilfe von „Pünktchen"erklärter Begriffe angeben. Möglicherweise ist Ihnen z.B. die n-te Potenz einer reellen Zahl durch

$$x^n := \underbrace{x \cdots x}_{n \text{ mal}}$$

erklärt worden, und diese Bezeichnung ist so suggestiv, dass Sie sie wohl stets im gewünschten Sinn interpretiert haben. Eine Definition ist das aber nicht (dazu hätte zunächst der Term auf der rechten Seite definiert sein müssen)! Korrekt – aufgrund des Rekursionsprinzip – hingegen die folgende

1.6.14 Definition

Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}^0$ heißt x^n (lies: x hoch n) die **n-te Potenz von x**. Die Potenzen werden rekursiv definiert durch:

$$\begin{aligned} x^0 &:= 1 \\ x^{n+1} &:= x^n \cdot x \qquad (n \geq 1). \end{aligned}$$

1.6.15 Definition

Gegeben seien $k, m \in \mathbb{N}^0$ mit $k \leq m$ und $a_i \in \mathbb{R}$ $(k \leq i \leq m)$. Man definiert

$$\sum_{i=k}^{m} a_i$$

(lies: Summe der a_i, i [in den Grenzen] von k bis m) rekursiv durch

$$\sum_{i=k}^{k} a_i := a_k \quad \text{und} \quad \sum_{i=k}^{n+1} a_i := (\sum_{i=k}^{n} a_i) + a_{n+1} \quad (k \leq n < m)$$

(Anm.: Im Schreibtext erscheint obiges Symbol in der Form $\sum_{i=k}^{m} a_i$).
$\sum$ heißt in diesem Zusammenhang des **Summenzeichen**, k und m heißen die **Summationsgrenzen**, i der **Summationsindex** der obigen Summe.

1.6.16 Bemerkung

Welcher Buchstabe für den Summationsindex gewählt wird, ist unwesentlich. (Beweisen Sie zur Übung durch Induktion nach m, dass $\sum_{j=k}^{m} a_j = \sum_{i=k}^{m} a_i$ gilt. [→**L**]
$\sum_{i=k}^{m} a_i$ gibt präzise die reelle Zahl an, die üblicherweise mit Pünktchen in der Form $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_m$ angedeutet wird.
Von daher werden Ihnen die folgenden, sich aus den Rechengesetzen für reelle Zahlen ergebenden Regeln für das Summenzeichen plausibel erscheinen:
Sind $k, l, m \in \mathbb{N}^0$ mit $k \leq l \leq m$, und $c, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(k \leq i \leq m)$, so gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k}^{m} c a_i &= c \sum_{i=k}^{m} a_i. \\ \sum_{i=k}^{m} (a_i + b_i) &= (\sum_{i=k}^{m} a_i) + (\sum_{i=k}^{m} b_i). \\ \sum_{i=k}^{l} a_i + \sum_{i=l+1}^{m} a_i &= \sum_{i=k}^{m} a_i. \end{aligned}$$

Geschickte Wahl des Summationsindex vereinfacht oft Beweise; besonders häufig wird von Identitäten wie

$$\sum_{i=k}^{m} a_i = \sum_{i=k+1}^{m+1} a_{i-1} \quad \text{oder} \quad \sum_{i=k}^{m} a_i = \sum_{i=k-1}^{m-1} a_{i+1}$$

Gebrauch gemacht. Ihre Gültigkeit (wie auch die der obigen Regeln) wollen wir zunächst einmal unterstellen. Wir werden sie unabhängig von dem hier Gesagten in allgemeinerem Zusammenhang beweisen.

Bei konkreten Rechnungen hat es sich als nützlich erwiesen, zur Vermeidung lästiger Fallunterscheidungen „leeren“ Summen den Wert 0 zuzuordnen.
Man definiert also

$$\sum_{i=k}^{m} a_i := 0, \quad \text{falls} \quad m < k.$$

1.6.17 Definition

Gegeben seien $k, m \in \mathbb{N}^0$ mit $k \leq m$ und $a_i \in \mathbb{R}$ $(k \leq i \leq m)$. Man definiert

$$\prod_{i=k}^{m} a_i$$

(lies: Produkt der a_i, i von k bis m) induktiv durch

$$\prod_{i=k}^{k} a_i := a_k \quad \text{und} \quad \prod_{i=k}^{n+1} a_i := (\prod_{i=k}^{n} a_i) \cdot a_{n+1} \quad (k \leq n \leq m)$$

Für das Produktzeichen gilt – mutatis mutandis – Analoges zu dem in 1.6.15 zum Summenzeichen Gesagten.
Hervorgehoben sei, dass man leeren Produkten den Wert 1 zuordnet:

$$\prod_{i=k}^{m} a_i := 1, \quad \text{falls} \quad m < k.$$

1.6.18 Aufgabe

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(2) Ist $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

[→ **L**]

Zum mathematischen Allgemeinwissen gehören ferner die folgenden Begriffe der Kombinatorik:

1.6.19 Definition

(1) Für $n \in \mathbb{N}^0$ wird $n!$ (lies: n-**Fakultät**) rekursiv definiert durch

$$0! := 1 \quad \text{und} \quad (n+1)! := (n!)(n+1) \quad \text{für} \quad n \geq 0.$$

(2) Für $n, k \in \mathbb{N}^0$ definiert man dann die **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ (lies: n über k) durch

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{falls } k \leq n \\ 0, & \text{falls } k > n. \end{cases}$$

1.6.20 Aufgabe

Beweisen Sie für alle $n, k \in \mathbb{N}^0$ die folgenden Gleichungen

(1) $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

(2) $$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \text{falls} \quad n \geq 1.$$

(3) $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

[$\rightarrow$ **L**]

1.6.21 Aufgabe

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$\mathfrak{S}_n := \{f \mid f : \mathbb{N}_n \longrightarrow \mathbb{N}_n \quad \text{und} \quad f \quad \text{ist bijektiv} \quad \}.$$

Beweisen Sie:

$$|\mathfrak{S}_n| = n!$$

[$\rightarrow$ **L**]

Die Bezeichnung Binomialkoeffizient beruht auf dem

1.6.22 Satz (Binomische Formel)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}^0$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Beweis($Ind(n)$):
$\underline{n = 0}$:
$(a+b)^0 = 1$ und $\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. Also gilt die Formel für $n = 0$.
$\underline{n \longmapsto n+1 (n \geq 0)}$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) \quad [1.6.17] \\
&= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\Big) \quad \text{[Induktionsvoraussetzung]} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

[Hier haben wir in der ersten Summe den Summationsindex k durch $k-1$ ersetzt, vgl.1.6.16]

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 \\
&\quad + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k})a^k b^{n+1-k} \\
&= b^{n+1} + a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} \quad [1.6.20(3)] \\
&= \binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1-0} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^{n+1-(n+1)} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

Das war die Induktionsbehauptung!
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Formel für alle natürlichen Zahlen.

1.6.23 Schlussbemerkung

Die natürlichen Zahlen und ihre elementaren Eigenschaften haben wir als gegeben angenommen, da eine systematische Herleitung aus einem Axiomensystem den Rahmen dieser einführenden Kurseinheit sprengen würde.
Um dem interessierten Leser eine vage Vorstellung davon zu vermitteln, wie ein Modell der natürlichen Zahlen aussieht, skizzieren wir kurz die Ideen, aus denen der italienische Mathematiker Guiseppe Peano (1858–1932) im Jahre 1895 das nach ihm benannte Axiomensystem formulierte.
Unsere intuitive Vorstellung vom Zählen beinhaltet:

(1) Es gibt einen Zählanfang (meistens mit 1 bezeichnet).

(2) Zu jeder Zahl gibt es genau einen „Nachfolger“, der von jeder vorher aufgezählten Zahl verschieden ist.

Die Menge der natürlichen Zahlen soll dann

(3) nur aus den nach (1) und (2) zustandegekommenen Elementen bestehen.

Letzteres kann man so ausdrücken: Es gibt keine echte Teilmenge der natürlichen Zahlen, die den Zählanfang und mit jeder Zahl ihren Nachfolger enthält.

In unserer heutigen Terminologie ist nun ein **Peanosches Modell für die natürlichen Zahlen** ein Tripel $(N, 1, s)$ mit folgenden Eigenschaften:

(0) N ist eine Menge.

(1) 1 ist Element von N.

(2) $s : N \to N$ ist eine injektive Abbildung mit $1 \notin s(N)$.

(3) (Induktionsaxiom): Besitzt eine Teilmenge $M \subset N$ die beiden Eigenschaften

(i) $1 \in M$

(ii) Für alle n gilt: $(n \in M \Rightarrow s(n) \in M)$,

so ist schon $M = N$.

Lösungshinweise

L1.2.11

(1): Für jede Menge M gilt nach 1.2.8(1): $\phi \subset M$, also $\phi \in \mathfrak{P}(M)$, d.h. $\mathfrak{P}(M) \neq \phi$.
(2):„$\Rightarrow$“: Für jedes $U \in \mathfrak{P}(N)$ gilt $U \subset N$ [1.2.10], mit $N \subset M$ [Voraussetzung] folgt aufgrund der Transitivität [1.2.8(4)] $U \subset M$, also $U \in \mathfrak{P}(M)$. Mithin gilt $\mathfrak{P}(N) \subset \mathfrak{P}(M)$.
„$\Leftarrow$“: $N \in \mathfrak{P}(N)$ gilt nach 1.2.8(2). Aus der Voraussetzung $\mathfrak{P}(N) \subset \mathfrak{P}(M)$ folgt dann $N \in \mathfrak{P}(M)$ [1.2.5], d.h. $N \subset M$ [1.2.10].

L1.2.13

(2): Für alle x gilt:

$$\begin{aligned}
x \in M \cup (N \cup L) &\iff (x \in M) \quad \text{oder} \quad (x \in N \quad \text{oder} \quad x \in L)\\
&\iff x \in M \quad \text{oder} \quad x \in N \quad \text{oder} \quad x \in L\\
&\iff (x \in M \quad \text{oder} \quad x \in N) \quad \text{oder} \quad (x \in L)\\
&\iff x \in (M \cup N) \cup L.\\
x \in M \cap (N \cap L) &\iff (x \in M) \quad \text{und} \quad (x \in N \quad \text{und} \quad x \in L)\\
&\iff x \in M \quad \text{und} \quad x \in N \quad \text{und} \quad x \in L\\
&\iff (x \in M \quad \text{und} \quad x \in N) \quad \text{und} \quad (x \in L)\\
&\iff x \in (M \cap N) \cap L.
\end{aligned}$$

Nach 1.2.2 (oder 1.2.9) folgt aus der ersten Kette von Äquivalenzen $M \cup (N \cup L) = (M \cup N) \cup L$, aus der zweiten $M \cap (N \cap L) = (M \cap N) \cap L$.
(3): Für alle x gilt:

$$\begin{aligned}
x \in M \cap (N \cup L) &\iff (x \in M) \quad \text{und} \quad (x \in N \quad \text{oder} \quad x \in L)\\
&\iff (x \in M \quad \text{und} \quad x \in N) \quad \text{oder} \quad (x \in M \quad \text{und} \quad x \in L)\\
&\iff x \in (M \cap N) \cup (M \cap L).\\
x \in M \cup (N \cap L) &\iff x \in M \quad \text{oder} \quad (x \in N \quad \text{und} \quad x \in L)\\
&\iff (x \in M \quad \text{oder} \quad x \in N) \quad \text{und} \quad (x \in M \quad \text{oder} \quad x \in L)\\
&\iff x \in (M \cup N) \cap (M \cup L).
\end{aligned}$$

L1.2.17

(1): Wegen $M \subset M$ [1.2.8(2)] gilt $M \cap M = M$ nach 1.2.16, (i) $\Longrightarrow$ (ii), $M \cup M = M$ nach 1.2.16, (i) $\Longrightarrow$ (iii).
(2): wegen $\phi \subset M$ [1.2.8(1)] gilt die Behauptung nach 1.2.16, (i)$\Longrightarrow$(ii), bzw. (i)$\Longrightarrow$(iii).
(3): Nach 1.2.14(1) gilt $N \cap M \subset M \subset N \cup M$. Aus der ersten Inklusion folgt $M \cup (N \cap M) = M$, aus der zweiten $M \cap (N \cup M) = M$ [1.2.16].

L1.2.20

(2): $$\begin{aligned}
x \in \bigcup_{i\in K} M_i &\iff \exists\, i \in K \text{ mit } x \in M_i\\
&\Longrightarrow \exists\, i \in I \text{ mit } x \in M_i \text{ (da } K \subset I)\\
&\iff x \in \bigcup_{i\in I} M_i.
\end{aligned}$$

(3): Für alle x gilt:

$$\begin{aligned}
x \in (\bigcap_{i\in J} M_i) \cap (\bigcap_{i\in K} M_i) &\iff x \in \bigcap_{i\in J} M_i \quad \text{und} \quad x \in \bigcap_{i\in K} M_i \\
&\iff \quad (\text{Für alle} \quad i \in J \quad \text{gilt:} \quad x \in M_i) \quad \text{und (für alle} \quad i \in K \quad \text{gilt:} \quad x \in M_i) \\
&\iff \quad \text{Für alle} \quad i,\ i \in J \quad \text{oder} \quad i \in K,\ \text{gilt:} x \in M_i \\
&\iff \quad \text{Für alle} \quad i \in J \cup K \quad \text{gilt:} \quad x \in M_i \\
&\iff x \in \bigcap_{i\in J\cup K} M_i.
\end{aligned}$$

L1.2.21

(2)„$\Rightarrow$“: Für jedes $k \in I$ gilt $M_k \subset \bigcup_{i\in I} M_i$ [1.2.20(1)]. Aus der Voraussetzung $\bigcup_{i\in I} M_i \subset L$ folgt aufgrund der Transitivität: Für jedes $k \in I$ gilt $M_k \subset L$.

„$\Leftarrow$“: Für alle x gilt:

$$\begin{aligned}
x \in \bigcup_{i\in I} M_i &\implies \exists\, i \in I : x \in M_i \\
&\implies x \in L, \quad \text{da nach Vor. für jedes} \quad i \in I \quad M_i \subset L \quad \text{gilt} \quad .
\end{aligned}$$

L1.2.22

(1): Für alle x gilt:

$$\begin{aligned}
x \in M \cap (\bigcup_{i\in I} N_i) &\iff x \in M \quad \text{und} \quad x \in \bigcup_{i\in I} N_i \\
&\iff x \in M \quad \text{und} \quad \exists\, i \in I : x \in N_i \\
&\iff \exists\, i \in I \quad \text{mit:} \quad x \in M \quad \text{und} \quad x \in N_i \\
&\iff x \in \bigcup_{i\in I} (M \cap N_i).
\end{aligned}$$

(2): Für alle x gilt:

$$\begin{aligned}
x \in M \cup (\bigcap_{i\in I} N_i) &\iff x \in M \quad \text{oder} \quad x \in \bigcap_{i\in I} N_i \\
&\iff x \in M \quad \text{oder} \quad (\forall\, i \in I : x \in N_i) \\
&\iff \forall\, i \in I : (x \in M \quad \text{oder} \quad x \in N_i) \\
&\iff x \in \bigcap_{i\in I} (M \cup N_i).
\end{aligned}$$

L1.2.25

(1),(2): Für alle x gilt:

$$\begin{aligned}
x \in (L \setminus M) \setminus N &\iff x \in L \setminus M \quad \text{und} \quad x \notin N \\
&\iff (x \in L \quad \text{und} \quad x \notin M) \quad \text{und} \quad x \notin N \\
&\iff x \in L \quad \text{und} \quad (x \notin M. \quad \text{und} \quad x \notin N) \\
&\iff x \in L \quad \text{und nicht} \quad (x \in M \quad \text{oder} \quad x \in N) \quad [\text{vgl. } 1.1.8(4)] \\
&\iff x \in L \quad \text{und} \quad x \notin (M \cup N) \iff x \in L \setminus (M \cup N).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \in L \setminus (M \setminus N) &\iff x \in L \quad \text{und} \quad x \notin (M \setminus N)\\
&\iff x \in L \quad \text{und nicht} \quad (x \in M \quad \text{und} \quad x \notin N)\\
&\iff x \in L \quad \text{und} \quad (x \notin M \quad \text{oder} \quad x \in N) \quad [\text{vgl. 1.1.8(5) und (1)}]\\
&\iff (x \in L \quad \text{und} \quad x \notin M) \quad \text{oder} \quad (x \in L \quad \text{und} \quad x \in N)\\
&\iff x \in L \setminus M \quad \text{oder} \quad x \in L \cap N \iff x \in (L \setminus M) \cup (L \cap N).
\end{aligned}$$

L1.2.26

(1): Ist $M \subset N$, so gilt für alle x:

$$\begin{aligned}
x \in M \setminus L &\iff x \in M \quad \text{und} \quad x \notin L\\
&\implies x \in N \quad \text{und} \quad x \notin L \quad [\text{da} \quad M \subset N] \iff x \in N \setminus L.\\
x \in L \setminus N &\iff x \in L \quad \text{und} \quad x \notin N\\
&\implies x \in L \quad \text{und} \quad x \notin M \quad [\text{da} \quad M \subset N] \iff x \in L \setminus M.
\end{aligned}$$

Für $M := L := \{1\}$ und $N := \emptyset$ gilt $M \not\subset N$ und $(\emptyset =)M \setminus L \subset N \setminus L (= \emptyset)$.
Für $M := \{1\}, L := N := \emptyset$ gilt $M \not\subset N$ und $L \setminus N \subset L \setminus M$.
Die Umkehrungen der Implikationen in (1) gelten also nicht generell.
(2),(3): Für alle x gilt:

$$\begin{aligned}
x \in L \setminus (M \cap N) &\iff x \in L \quad \text{und} \quad x \notin (M \cap N)\\
&\iff x \in L \quad \text{und} \quad (x \notin M \quad \text{oder} \quad x \notin N) \quad [\text{vgl. 1.1.8(5)}]\\
&\iff (x \in L \quad \text{und} \quad x \notin M) \quad \text{oder} \quad (x \in L \quad \text{und} \quad x \notin N)\\
&\iff x \in L \setminus M \quad \text{oder} \quad x \in L \setminus N\\
&\iff x \in (L \setminus M) \cup (L \setminus N).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \in L \setminus (M \cup N) &\iff x \in L \quad \text{und} \quad x \notin M \cup N\\
&\iff x \in L \quad \text{und nicht} \quad (x \in M \quad \text{oder} \quad x \in N)\\
&\iff x \in L \quad \text{und} \quad (x \notin M \quad \text{und} \quad x \notin N)\\
&\iff x \in L \quad \text{und} \quad x \notin M \quad \text{und} \quad x \in L \quad \text{und} \quad x \notin N\\
&\iff x \in L \setminus M \quad \text{und} \quad x \in L \setminus N\\
&\iff x \in (L \setminus M) \cap (L \setminus N).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \in (L \cap M) \setminus N &\iff x \in L \cap M \quad \text{und} \quad x \notin N\\
&\iff x \in L \quad \text{und} \quad x \in M \quad \text{und} \quad x \notin N\\
&\iff x \in L \quad \text{und} \quad x \notin N \quad \text{und} \quad x \in M \quad \text{und} \quad x \notin N\\
&\iff x \in L \setminus N \quad \text{und} \quad x \in M \setminus N\\
&\iff x \in (L \setminus N) \cap (M \setminus N).\\
x \in (L \cup M) \setminus N &\iff x \in L \cup M \quad \text{und} \quad x \notin N\\
&\iff (x \in L \quad \text{oder} \quad x \in M) \quad \text{und} \quad x \notin N\\
&\iff x \in L \setminus N \quad \text{oder} \quad x \in M \setminus N\\
&\iff x \in (L \setminus N) \cup (M \setminus N).
\end{aligned}$$

L1.2.27

(1): Für alle x gilt:

$$\begin{aligned}
x \in M \setminus (\bigcap_{i\in I} N_i) &\iff x \in M \quad \text{und} \quad x \notin \bigcap_{i\in I} N_i \\
&\iff x \in M \quad \text{und nicht} \quad (\forall\, i \in I : x \in N_i) \\
&\iff x \in M \quad \text{und} \quad \exists\, i \in I : x \notin N_i \quad \text{[vgl. 1.1.10]} \\
&\iff \exists\, i \in I : (x \in M \quad \text{und} \quad x \notin N_i) \\
&\iff \exists\, i \in I : x \in M \setminus N_i \\
&\iff x \in \bigcup_{i\in I} (M \setminus N_i).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \in M \setminus (\bigcup_{i\in I} N_i) &\iff x \in M \quad \text{und nicht} \quad (x \in \bigcup_{i\in I} N_i) \\
&\iff x \in M \quad \text{und nicht} \quad (\exists\, i \in I : x \in N_i) \\
&\iff x \in M \quad \text{und} \quad \forall\, i \in I : x \notin N_i \\
&\iff \forall\, i \in I : (x \in M \quad \text{und} \quad x \notin N_i) \\
&\iff x \in \bigcap_{i\in I} (M \setminus N_i).
\end{aligned}$$

L1.3.5

(4): Für alle $b \in B$ gilt:

$$\begin{aligned} b \in f(U \cap U') &\iff \exists\, a \in U \cap U' \quad \text{mit} \quad b = f(a) \\ &\implies \exists\, u \in U \quad \text{mit} \quad b = f(u) \quad \text{und} \quad \exists\, u' \in U' \quad \text{mit} \quad b = f(u') \\ &\iff b \in f(U) \quad \text{und} \quad b \in f(U') \\ &\iff b \in f(U) \cap f(U') \end{aligned}$$

Für alle $a \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} a \in \overset{-1}{f}(V \cap V') &\iff f(a) \in V \cap V' \\ &\iff f(a) \in V \quad \text{und} \quad f(a) \in V' \\ &\iff a \in \overset{-1}{f}(V) \quad \text{und} \quad a \in \overset{-1}{f}(V') \\ &\iff a \in \overset{-1}{f}(V) \cap \overset{-1}{f}(V'). \end{aligned}$$

(5): Für alle $b \in B$ gilt:

$$\begin{aligned} b \in f(U) \setminus f(U') &\iff b \in f(U) \quad \text{und} \quad b \notin f(U') \\ &\iff \exists\, u \in U \quad \text{mit} \quad b = f(u) \quad \text{und für alle} \quad u' \in U' \quad \text{gilt} \quad f(u') \neq b \\ &\implies \exists\, u \in U \quad \text{mit} \quad b = f(u) \quad \text{und} \quad u \notin U' \\ &\iff \exists\, u \in U \setminus U' \quad \text{mit} \quad b = f(u) \\ &\iff b \in f(U \setminus U'). \end{aligned}$$

Für alle $a \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} a \in \overset{-1}{f}(V \setminus V') &\iff f(a) \in V \setminus V' \\ &\iff f(a) \in V \quad \text{und} \quad f(a) \notin V' \\ &\iff a \in \overset{-1}{f}(V) \quad \text{und} \quad a \notin \overset{-1}{f}(V') \\ &\iff a \in \overset{-1}{f}(V) \setminus \overset{-1}{f}(V') \end{aligned}$$

L1.3.7

(1): Für alle $b \in B$ gilt:

$$\begin{aligned} b \in f(\textstyle\bigcup_{i\in I} U_i) &\iff \exists\, a : b = f(a) \quad \text{und} \quad a \in \textstyle\bigcup_{i \in I} U_i \\ &\iff \exists\, a : b = f(a) \quad \text{und} \quad \exists\, i \in I : a \in U_i \\ &\iff \exists\, i \in I : b \in f(U_i) \\ &\iff b \in \textstyle\bigcup_{i\in I} f(U_i). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \in f(\textstyle\bigcap_{i\in I} U_i) &\iff \exists\, a : b = f(a) \quad \text{und} \quad a \in \textstyle\bigcap_{i \in I} U_i \\ &\iff \exists\, a : b = f(a) \quad \text{und} \quad \forall\, i \in I : a \subset U_i \\ &\implies \forall\, i \in I : b \in f(U_i) \\ &\iff b \in \textstyle\bigcap_{i\in I} f(U_i). \end{aligned}$$

(2): Für alle $a \in A$ gilt:

$$\begin{aligned}
a \in \overset{-1}{f}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) &\iff f(a) \in \bigcup_{i\in I} V_i \\
&\iff \exists\, i \in I : f(a) \in V_i \\
&\iff \exists\, i \in I : a \in \overset{-1}{f}(V_i) \\
&\iff a \in \bigcup_{i\in I} \overset{-1}{f}(V_i). \\
a \in \overset{-1}{f}\left(\bigcap_{i\in I} V_i\right) &\iff f(a) \in \bigcap_{i\in I} V_i \\
&\iff \forall\, i \in I : f(a) \in V_i \\
&\iff \forall\, i \in I : a \in \overset{-1}{f}(V_i) \\
&\iff a \in \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{f}(V_i).
\end{aligned}$$

L1.3.16

(1), (i)$\Rightarrow$(ii): Die Implikation „$\Longrightarrow$“ in (ii) gilt allgemein [1.3.5(2)], zu zeigen bleibt „$\Longleftarrow$“. Seien $U_1, U_2 \subset A$.

$$\begin{aligned}
f(U_1) \subset f(U_2) &\implies \overset{-1}{f}(f(U_1)) \subset \overset{-1}{f}(f(U_2)) \quad [1.3.5(2)] \\
&\implies U_1 \subset U_2, \quad \text{denn} \quad f \quad \text{ist injektiv } [(i)]
\end{aligned}$$

und nach 1.3.15(ii) ist $\overset{-1}{f}(f(U_1)) = U_1$ und $\overset{-1}{f}(f(U_2)) = U_2$.

(ii)$\Rightarrow$(i): Seien $a_1, a_2 \in A$ und $f(a_1) = f(a_2)$. Dann gilt $f(\{a_1\}) = f(\{a_2\})$. Aus der Inplikation „$\Longleftarrow$“ in (ii) folgt $\{a_1\} = \{a_2\}$, d.h. $a_1 = a_2$. Also ist f injektiv.

(i)$\Rightarrow$(iii): $f(U_1 \cap U_2) \subset f(U_1) \cap f(U_2)$ gilt nach 1.3.5(4). Umgekehrt gilt für alle $x \in A$:

$$\begin{aligned}
x \in f(U_1) \cap f(U_2) &\implies \exists\, u_1 \in U_1, \exists\, u_2 \in U_2 \quad \text{mit} \quad x = f(u_1) = f(u_2) \\
&\implies x \in f(U_1 \cap U_2),
\end{aligned}$$

denn es ist $u_1 = u_2 \in U_1 \cap U_2$, weil f injektiv ist.

(iii)$\Rightarrow$(i): Seien $a_1, a_2 \in A$ und $a_1 \neq a_2$. Dann ist $\{a_1\} \cap \{a_2\} = \emptyset$, nach (iii) also $f(\{a_1\}) \cap f(\{a_2\}) = \emptyset$, folglich $f(a_1) \neq f(a_2)$. Nach 1.3.15(v) ist f injektiv.

(i)$\Rightarrow$(iv): $f(U_1 \setminus U_2) \supset f(U_1) \setminus f(U_2)$ gilt nach 1.3.5(5).

„$\subset$“: Für alle $b \in B$ gilt:

$$\begin{aligned}
b \in f(U_1 \setminus U_2) &\iff \exists\, a \quad \text{mit} \quad b = f(a), a \in U_1, a \notin U_2 \\
&\implies b \in f(U_1), b \notin f(U_2), \quad \text{denn} \quad a \quad \text{ist das einzige Element aus} \quad A \\
&\qquad \text{mit} \quad b = f(a), \quad \text{da} \quad f \quad \text{injektiv ist } [1.3.15(iv)] \\
&\implies b \in f(U_1) \setminus f(U_2).
\end{aligned}$$

(iv)$\Rightarrow$(i): Seien $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \neq a_2$. Dann ist $f(\{a_1\}) \setminus f(\{a_2\}) = f(\{a_1\} \setminus \{a_2\}) = \emptyset$, also $f(a_1) \neq f(a_2)$. Folglich ist f injektiv.

(2),(i)$\Rightarrow$(ii): Die Implikation „$\Longrightarrow$“ in (ii) gilt nach 1.3.5(2). Seien $V_1, V_2 \in B$:

$$\begin{aligned}
\overset{-1}{f}(V_1) \subset \overset{-1}{f}(V_2) &\implies f(\overset{-1}{f}(V_1)) \subset f(\overset{-1}{f}(V_2)) \quad [1.3.5(2)] \\
&\implies V_1 \subset V_2, \quad \text{da} \quad f \quad \text{surjektiv } [1.3.14(ii)]
\end{aligned}$$

(ii)⇒(i): Es gilt $f(A) \subset B$ und $\overset{-1}{f}(B) \subset A$ [1.3.5(1)]. Nach 1.3.10(1) und 1.3.5(2) folgt hieraus $A \subset \overset{-1}{f}(f(A)) \subset \overset{-1}{f}(B) \subset A$, also $\overset{-1}{f}(f(A)) = \overset{-1}{f}(B)$.
Mit der Implikation „$\Longleftarrow$" aus (ii) folgt hieraus $f(A) = B$, d.h. f ist surjektiv [1.3.14(v)].

L1.3.21
$f \circ id_A, f, id_B \circ f$ haben alle A als Definitions- und B als Wertebereich, und für alle $a \in A$ gilt: $(f \circ id_A)(a) = f(id_A(a)) = f(a) = id_B(f(a)) = (id_B \circ f)(a)$.

L1.3.25
(1): Sei $c \in C$. Da $g \circ f$ surjektiv ist, gibt es ein $a \in A$ mit $c = (g \circ f)(a) = g(f(a))$. $f(a) \in B$ ist also Urbild von c unter g. Nach 1.3.14(iv) ist g surjektiv.
(2): Seien $a_1, a_2 \in A$ mit $f(a_1) = f(a_2)$. Es folgt $(g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = (g \circ f)(a_2)$. Da $g \circ f$ injektiv ist, folgt $a_1 = a_2$. Nach Definition [1.3.12(2)] ist f injektiv.

L1.3.32
(1): Für $X \subset M$ ist $(c \circ c)(X) = c(c(X)) = c(M \setminus X)$

$$\begin{aligned} = M \setminus (M \setminus X) &= (M \setminus M) \cup (M \cap X) \quad [1.2.25(2)] \\ = \emptyset \cup (M \cap X) &= M \cap X \quad [1.2.17(2)] \\ = X, & \qquad \text{da} \quad X \subset M \quad [1.2.16] \quad . \end{aligned}$$

Es ist also $c \circ c = id_{\mathfrak{P}(M)}$.
(2): Aus $c \circ c = id_{\mathfrak{P}(M)}$ folgt nach Satz 1.3.30, dass c bijektiv ist und $c^{-1} = c$ gilt.

L1.4.5
$M \times N = \{(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$.
$N \times M = \{(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\}$.

L1.4.6
(1): Äquivalent ist [vgl. 1.1.8(2),(4)]: $M \times N \neq \emptyset \Longleftrightarrow (M \neq \emptyset \quad \text{und} \quad N \neq \emptyset)$.

$$\begin{aligned} M \times N \neq \emptyset &\Longleftrightarrow \exists\, z = (x,y), x \in M, y \in N \Longleftrightarrow \exists\, x \in M \quad \text{und} \quad \exists\, y \in N \\ &\Longleftrightarrow M \neq \emptyset \quad \text{und} \quad N \neq \emptyset. \end{aligned}$$

(2): Für alle x, y gilt:

$$\begin{aligned} (x,y) \in M \times (N \cap N') &\Longleftrightarrow x \in M \quad \text{und} \quad y \in N \cap N' \\ &\Longleftrightarrow x \in M \quad \text{und} \quad y \in N \quad \text{und} \quad y \in N' \\ &\Longleftrightarrow (x \in M \quad \text{und} \quad y \in N) \quad \text{und} \quad (x \in M \quad \text{und} \quad y \in N') \\ &\Longleftrightarrow (x,y) \in M \times N \quad \text{und} \quad (x,y) \in M \times N' \\ &\Longleftrightarrow (x,y) \in (M \times N) \cap (M \times N'). \\ (x,y) \in M \times (N \cup N') &\Longleftrightarrow x \in M \quad \text{und} \quad (y \in N \quad \text{oder} \quad y \in N') \\ &\Longleftrightarrow (x,y) \in M \times N \quad \text{oder} \quad (x,y) \in M \times N' \\ &\Longleftrightarrow (x,y) \in (M \times N) \cup (M \times N'). \end{aligned}$$

L1.4.11
Für $(x_1, \ldots, x_n) \in M^n$ sei $f_{(x_1,\ldots,x_n)}$ die wie im Beweis zu 1.4.10 definierte Abbildung von $\mathbb{N}_n$ nach M.
Man definiere dann ψ durch $\psi : M^n \longrightarrow \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_n, M), \psi((x_1, \ldots, x_n) := f_{(x_1,\ldots,x_n)}$.
Dann gilt für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in M^n$
$(\phi \circ \psi)((x_1, \ldots, x_n)) = \phi(f_{(x_1,\ldots,x_n)}) = (x_1, \ldots, x_n)$ [vgl. 1.4.10]
und für alle $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_n, M)$ gilt
$(\psi \circ \phi)(f) = \psi((f(1), \ldots, f(n))) = f_{(f(1),\ldots,f(n))} = f$,
da f und $f_{(f(1),\ldots,f(n))}$ gleiche Definitions- und Wertebereiche haben und für alle
$k \in \mathbb{N}_n$ $f_{(f(1),\ldots f(n))}(k) = f(k)$ gilt.
$\phi \circ \psi$ und $\psi \circ \phi$ sind also Identitäten auf M^n bzw. $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}_n, M)$.

L1.4.18
Wegen $f, g \in \mathrm{Abb}(A, B)$ bleibt zu zeigen: $\forall\, a \in A$ ist $f(a) = g(a)$. Nun gilt für jedes $a \in A$:

$$\begin{aligned} (a, f(a)) \in G_f &\Longrightarrow \exists\, a' \in A \quad \text{mit} \quad (a, f(a)) = (a', g(a')) \\ &\qquad [\text{da} \quad G_f = G_g] \\ &\Longrightarrow \exists\, a' \in A \quad \text{mit} \quad a = a' \quad \text{und} \quad f(a) = g(a') \\ &\qquad [\text{Gleichheit von Paaren: 1.4.1}] \\ &\Longrightarrow f(a) = g(a) \end{aligned}$$

L1.4.23

$$
\begin{array}{lll}
\underline{(1)}\text{: } R \text{ reflexiv} & \Longleftrightarrow & \forall\, x \in M \text{ gilt } (x,x) \in R \\
 & \Longleftrightarrow & \Delta_M \subset R \text{ nach Definition von } \Delta_M \text{ [1.4.15(3)]} \\
\underline{(2)}\text{: } R \text{ symmetrisch} & \Longleftrightarrow & \forall\, x,y \in M((x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \in R) \\
 & \Longleftrightarrow & \forall\, x,y \in M((x,y) \in R \Longleftrightarrow (y,x) \in R) \\
 & & \text{[Wenn } \underline{\text{für alle}}\ x,y \text{ gilt } ((x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \in R), \\
 & & \text{folgt aus } (x,y) \in R \text{ wiederum } (x,y) \in R] \\
 & \Longleftrightarrow & R = R^{-1}. \\
\underline{(3)}\text{: } R \text{ transitiv} & \Longleftrightarrow & \forall\, x,y,z \in M : ((xRy \wedge yRz) \Longrightarrow xRz) \\
 & \Longleftrightarrow & \forall\, x,z \in M : ((x,z) \in R \circ R \Longrightarrow (x,z) \in R) \\
 & \Longleftrightarrow & R \circ R \subset R. \\
\underline{(4)}\text{: } R \text{ antisymmetrisch} & \Longleftrightarrow & \forall\, x,y \in M : ((xRy \wedge yRx) \Longrightarrow (x = y)) \\
 & \Longleftrightarrow & \forall\, x,y \in M : (((x,y) \in R \wedge (x,y) \in R^{-1}) \Longrightarrow (x = y)) \\
 & \Longleftrightarrow & R \cap R^{-1} \subset \Delta_M. \\
\underline{(5)}\text{: } R \text{ linear} & \Longrightarrow & \forall\, x,y \in M : (xRy \text{ oder } yRx) \\
 & \Longleftrightarrow & \forall\, x,y \in M : ((x,y) \in R \text{ oder } (x,y) \in R^{-1}) \\
 & \Longleftrightarrow & M \times M \subset R \cup R^{-1}.
\end{array}
$$

Da für jede Relation R auf M die Inklusion $R \cup R^{-1} \subset M \times M$ gilt, folgt die Behauptung.

L1.5.2
Reflexivität: Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ gilt: n teilt $0 = a - a$.
Symmetrie: $(a,b) \in R_n \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ mit $(a-b) = k\cdot n \Longrightarrow b-a = (-k)n \Longrightarrow (b,a) \in R_n$.
Transitivität: $(a,b),(b,c) \in R_n \Longrightarrow \exists\, k,m \in \mathbb{Z} : (a-b) = k \cdot n, (b-c) = m \cdot n$
$\Longrightarrow a - c = a - b + b - c = (k+m)n \Longrightarrow (a,c) \in R_n$.

L1.5.6

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad &\Longleftrightarrow \quad \pi_R/V : V \longrightarrow M/R \text{ ist Bijektion [Def. 1.5.4(4)]}\\
&\Longleftrightarrow \quad \text{Zu jedem } x \in M \text{ gibt es genau ein } v \in V\\
& \quad \text{mit } \pi_R(v) = [x] \text{ [1.3.17].}\\
&\Longleftrightarrow \quad \text{(ii), denn } \pi_R(v) = [x] \Longleftrightarrow [v] = [x] \Longleftrightarrow v \sim x \text{ mod } R \text{ [1.5.5 (3)].}
\end{aligned}$$

L1.5.11
Für alle $x, y \in M$ gilt:

$$\begin{aligned}
x \sim y \; mod \; R(\pi_R) \quad &\Longleftrightarrow \quad \pi_R(x) = \pi_R(y) \quad \text{[Def. von} \quad R(\pi_R)]\\
&\Longleftrightarrow \quad [x]_R = [y]_R \quad \text{[Def. von} \quad \pi_R]\\
&\Longleftrightarrow \quad x \sim y \; mod \; R \quad \text{[1.5.5(3)]} \quad .
\end{aligned}$$

L1.5.18
Wir zeigen: $\forall\, R \subset M \times M$ gilt: R Ordnung auf $M \Longrightarrow R^{-1}$ Ordnung auf M.
Wendet man dieses Ergebnis dann auf R^{-1} an, so erhält man wegen $(R^{-1})^{-1} = R$ die inverse Implikation.

$$\begin{aligned}
\text{Reflexivität:} R \quad \text{reflexiv} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall\, x \in M : (x,x) \in R\\
&\Longleftrightarrow \quad \forall\, x \in M : (x,x) \in R^{-1} \Longleftrightarrow R^{-1} \quad \text{reflexiv} \quad .
\end{aligned}$$

Transitivität: Seien $x, y, z \in M$:

$$\begin{aligned}
(x,y),(y,z) \in R^{-1} \quad &\Longrightarrow \quad (z,y),(y,x) \in R\\
&\Longrightarrow \quad (z,x) \in R, \quad \text{da} \quad R \quad \text{transitiv}\\
&\Longrightarrow \quad (x,z) \in R^{-1}.
\end{aligned}$$

Antisymmetrie: R antisymmetrisch $\Longleftrightarrow R \cap R^{-1} \subset \Delta_M$ [1.4.23(4)]
$\Longleftrightarrow (R^{-1})^{-1} \cap R^{-1} \subset \Delta_M$ $[R = (R^{-1})^{-1}] \Longleftrightarrow R^{-1}$ antisymmetrisch [1.4.23(4)].

L1.5.26
Ersetzen Sie in den Beweisen zu (1)–(3) jeweils das Wort „Maximum“ durch „Minimum“, „größtes“ durch „kleinstes“, „maximal“ durch „minimal“, das Zeichen „$\leq$“ durch „$\geq$“ und „$\geq$“ durch „$\leq$“ .

L1.6.9
Beweis durch vollständige Induktion nach $n = |M|$.
$\underline{n = 1}$: Sei $M = \{a\}$. Dann ist $\mathfrak{P}(M) = \{\emptyset,\ M\}$ [1.2.8(1),(2)], also $|\mathfrak{P}(M)| = 2 = 2^1$.
$\underline{n \longmapsto n+1 (n \geq 1)}$:
Es sei M eine Menge mit $|M| = n + 1$. $(n \geq 0)$. Sei $a \in M$. Für $M' := M \setminus \{a\}$ gilt dann $|M'| = n$ und $\mathfrak{P}(M) = \mathfrak{P}(M') \cup \{N \cup \{a\} \mid N \in \mathfrak{P}(M')\}$, und diese Vereinigung ist disjunkt. Ferner ist

$$\begin{aligned} f : \mathfrak{P}(M') &\longrightarrow \{N \cup \{a\} \mid N \in \mathfrak{P}(M')\} \\ N &\longmapsto N \cup \{a\} \end{aligned}$$

eine Bijektion.
Also ist $|\mathfrak{P}(M)| = 2 \cdot |\mathfrak{P}(M')|$.
Nach Induktionsvoraussetzung ist $|\mathfrak{P}(M')| = 2^n$, da $|M'| = n$, also ist $|\mathfrak{P}(M)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.
Wegen $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ [1.2.8(1)] gilt die Aussage auch für die leere Menge.

L1.6.16
$\underline{m = k}$:

$$\sum_{j=k}^{k} a_j = a_k = \sum_{i=k}^{k} a_i.$$

$\underline{m \mapsto m + 1 \quad (m \geq k)}$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^{m+1} a_j &= \sum_{j=k}^{m} a_j + a_{m+1} \\ &= \sum_{i=k}^{m} a_i + a_{m+1} \quad \text{[Ind.vor.]} \\ &= \sum_{i=k}^{m+1} a_i. \end{aligned}$$

L1.6.18
$\underline{(1)}$: $\underline{n = 1}$: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.
$\underline{n \longmapsto n+1 (n \geq 1)}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \quad \text{[Induktionsvoraussetzung]} \\ &= (n+1)(\frac{n}{2} + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{(2)} : \underline{n = 1} : \sum_{k=0}^{1} &= q^0 + q^1 = 1 + q = \frac{(1+q)(1-q)}{1-q} \quad [\text{wegen} \quad q \neq 1] \\ &= \frac{1-q^2}{1-q} = \frac{1-q^{(1+1)}}{1-q}. \end{aligned}$$

$\underline{n \longmapsto n+1 (n \geq 1)}$:
Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q\cdot q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{(n+1)+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

L1.6.20
(1):

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = 1. \\ \binom{n}{n} &= \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1. \end{aligned}$$

(2):

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} &= \frac{n!}{1!(n-1)!} = n. \\ \binom{n}{n-1} &= \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n. \end{aligned}$$

(3): Im Fall $k > n$ hat die Behauptung die Form $0+0=0$, im Fall $k=n$ die Form $1 = 1+0$, es bleibt also der Fall $0 \leq k < n$ zu zeigen. Dann ist

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(k+1)!}((k+1)+(n-k)) \\ &= \frac{n!(n+1)}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\ &= \binom{n+1}{k+1}. \end{aligned}$$

L1.6.21
Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $i \in \mathbb{N}_{n+1}$ definiert man

$$M_i := \{f \mid f \in \mathfrak{S}_{n+1} \quad \text{und} \quad f(n+1) = i\}.$$

Damit ist $\mathfrak{S}_{n+1} = \bigcup_{n+1} M_i$, und diese Vereinigung ist disjunkt, so dass $|\mathfrak{S}_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |M_i|$ gilt.

Definiert man für $i \in \mathbb{N}_n$ die Abbildung $t_i \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_{n+1}, \mathbb{N}_{n+1})$ durch

$$t_i(k) := \left\{ \begin{array}{lll} k & ,\text{falls} & k \in \mathbb{N}_{n+1} \setminus \{i, n+1\} \\ i & ,\text{falls} & k = n+1 \\ n+1 & ,\text{falls} & k = i \end{array} \right\}$$

so gilt $t_i \circ t_i = id_{\mathbb{N}_{n+1}}$, also $t_i \in \mathfrak{S}_{n+1}$ [1.3.30].
Man rechnet nach, dass für jedes $i \in \mathbb{N}_n$

$$\begin{array}{rcl} \psi_i & : & M_i \longrightarrow M_{n+1} \\ & & f \longmapsto t_i \circ f \end{array}$$

eine Bijektion ist:
Zunächst ist für jedes $f \in M_i$ die Abbildung $t_i \circ f \in M_{n+1}$.
ψ_i ist injektiv, denn für $f_1, f_2 \in M_i$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} \psi_i(f_1) = \psi_i(f_2) & \iff & t_i \circ f_1 = t_i \circ f_2 \\ & \Longrightarrow & t_i \circ (t_i \circ f_1) = t_i \circ (t_i \circ f_2) \\ & \Longrightarrow & (t_i \circ t_i) \circ f_1 = (t_i \circ t_i) \circ f_2 \\ & \Longrightarrow & f_1 = f_2 \quad [t_i \circ t_i = id_{\mathbb{N}_{n+1}}]. \end{array}$$

ψ_i ist surjektiv, denn für $g \in M_{n+1}$ ist $t_i \circ g \in M_i$ und $\psi_i(t_i \circ g) = t_i \circ (t_i \circ g) = g$.
Also ist für jedes $i \in \mathbb{N}_n : |M_i| = |M_{n+1}|$.
Ferner ist $|M_{n+1}| = |\mathfrak{S}_n|$, denn die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \phi & : & M_{n+1} \longrightarrow \mathfrak{S}_n \\ & & f \longmapsto \mathbb{N}_n \setminus f/\mathbb{N}_n \end{array}$$

ist eine Bijektion.
Man hat also insgesamt

$$|\mathfrak{S}_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |M_i| = \sum_{i=1}^{n+1} |\mathfrak{S}_n| = |\mathfrak{S}_n| \sum_{i=1}^{n+1} 1 = |\mathfrak{S}_n|(n+1).$$

Beh.: $|\mathfrak{S}_n| = n!$
Beweis (Ind(n)):
$\underline{(n=1)}$: $|\mathfrak{S}_1| = 1 = 1!$, denn $\mathfrak{S}_1 = \{id_{\mathbb{N}_1}\}$.
$\underline{(n \longmapsto n+1 \ \ (n \geq 1)}$:
Aus $|\mathfrak{S}_n| = n!$ (Ind.vor.) folgt nach obiger Vorbemerkung

$$|\mathfrak{S}_{n+1}| = |\mathfrak{S}_n|(n+1) = (n!)(n+1) = (n+1)!.$$

Glossar zur Kurseinheit 1

1.1.8

$\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *seien Aussagen. Dann gilt:*

(1) *Die Aussage* $\neg(\neg\mathfrak{A})$ *ist gleichbedeutend mit der Aussage* $\mathfrak{A}$.

(2) $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ *ist gleichbedeutend mit* $(\neg\mathfrak{B}) \Rightarrow (\neg\mathfrak{A})$.

(3) $\mathfrak{A} \iff \mathfrak{B}$ *ist gleichbedeutend mit* $(\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}) \wedge (\mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A})$.

(4) $\neg(A \vee \mathfrak{B})$ *ist gleichbedeutend mit* $(\neg\mathfrak{A}) \wedge (\neg\mathfrak{B})$.

(5) $\neg(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$ *ist gleichbedeutend mit* $(\neg\mathfrak{A}) \vee (\neg\mathfrak{B})$.

(6) $\neg(\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B})$ *ist gleichbedeutend mit* $\mathfrak{A} \wedge (\neg\mathfrak{B})$.

1.2.8

L, M, N seien Mengen. Dann gilt:

(1) $\emptyset \subset M$.

(2) $M \subset M$.

(3) *Gilt* $M \subset N$ *und* $N \subset M$, *so ist* $M = N$.

(4) *Gilt* $M \subset N$ *und* $N \subset L$, *so gilt* $M \subset L$. („Transitivität der Inklusion“)

1.2.9

M und N seien Mengen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $M = N$.
(ii) $M \subset N$ *und* $N \subset M$.

1.2.13

L, M, N seien Mengen. Dann gilt

(1) $M \cup N = N \cup M$.
$M \cap N = N \cap M$. („Kommutativität“)

(2) $M \cup (N \cup L) = (M \cup N) \cup L$.
$M \cap (N \cap L) = (M \cap N) \cap L$. („Assoziativität“)

(3) $M \cap (N \cup L) = (M \cap N) \cup (M \cap L)$.
$M \cup (N \cap L) = (M \cup N) \cap (M \cup L)$. („Distributivität“)

1.2.14

L, M, N seien Mengen. Dann gilt:

(1) $M \cap N \subset M \subset M \cup N$.

(2) $(L \subset M \;\text{ und }\; L \subset N) \iff L \subset M \cap N$.

(3) $(M \subset L \;\text{ und }\; N \subset L) \iff M \cup N \subset L$.

1.2.16

M und N seien Mengen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $N \subset M$.
(ii) $M \cap N = N$.
(iii) $M \cup N = M$.

1.2.17

M und N seien Mengen. Dann gilt:

(1) $M \cap M = M = M \cup M$.

(2) $M \cap \emptyset = \emptyset$ *und* $M \cup \emptyset = M$.

(3) $M \cap (N \cup M) = M = M \cup (N \cap M)$.

1.2.20

Es sei I eine nichtleere Menge, und für jedes $i \in I$ sei eine Menge M_i gegeben. J und K seien nichtleere Teilmengen von I. Dann gilt:

(1) *Für jedes $k \in I$ gilt*

$$\bigcap_{i\in I} M_i \subset M_k \quad \textit{und} \quad M_k \subset \bigcup_{i\in I} M_i.$$

(2)

$$\bigcap_{i\in I} M_i \subset \bigcap_{i\in K} M_i \quad \textit{und} \quad \bigcup_{i\in K} M_i \subset \bigcup_{i\in I} M_i.$$

(3)

$$\left(\bigcup_{i\in J} M_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in K} M_i\right) = \bigcup_{i\in J\cup K} M_i.$$

$$\left(\bigcap_{i\in J} M_i\right) \cap \left(\bigcap_{i\in K} M_i\right) = \bigcap_{i\in J\cup K} M_i.$$

1.2.21

I sei eine nichtleere Menge, $L, M_i (i \in I)$ seien Mengen, dann gelten folgende Äquivalenzen:

(1) $L \subset \bigcap_{i\in I} M_i \iff$ *Für alle $i \in I$ gilt $L \subset M_i$.*

(2) $\bigcup_{i\in I} M_i \subset L \iff$ *Für alle $i \in I$ gilt $M_i \subset L$.*

1.2.22

I sei eine nichtleere Menge, M, N_i $(i \in I)$ seien Mengen. Dann gilt:

(1) $M \cap (\bigcup_{i\in I} N_i) = \bigcup_{i\in I}(M \cap N_i)$.

(2) $M \cup \left(\bigcap_{i\in I} N_i\right) = \bigcap_{i\in I} (M \cup N_i)$.

1.2.24

M und N seien Mengen. Dann gilt:

(1) $M\backslash N \subset M$.

(2) $(M\backslash N) \cap N = \emptyset$ *und* $(M\backslash N) \cup N = M \cup N$.

(3) $M\backslash N = M \iff M \cap N = \emptyset$.

(4) $M\backslash N = \emptyset \iff M \subset N$.

1.2.26

L, M, N seien Mengen. Dann gilt

(1) $M \subset N \Rightarrow M\backslash L \subset N\backslash L$.
$M \subset N \Rightarrow L\backslash N \subset L\backslash M$.

(2) $L\backslash(M \cap N) = (L\backslash M) \cup (L\backslash N)$.
$L\backslash(M \cup N) = (L\backslash M) \cap (L\backslash N)$.

(3) $(L \cap M)\backslash N = (L\backslash N) \cap (M\backslash N)$.
$(L \cup M)\backslash N = (L\backslash N) \cup (M\backslash N)$.

1.2.27

I sei eine nichtleere Menge, M, N_i $(i \in I)$ seien Mengen. Dann gilt:

(1) $M\backslash \left(\bigcap_{i\in I} N_i\right) = \bigcup_{i\in I}(M\backslash N_i)$.

(2) $M\backslash \left(\bigcup_{i\in I} N_i\right) = \bigcap_{i\in I}(M\backslash N_i)$.

1.3.5

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung, U, U' seien Teilmengen von A und V, V' seien Teilmengen von B. Dann gilt:

(1) $f(U) \subset B$ *und* $\overset{-1}{f}(V) \subset A$.

(2) $U \subset U' \Rightarrow f(U) \subset f(U')$.
$V \subset V' \Rightarrow \overset{-1}{f}(V) \subset \overset{-1}{f}(V')$.

(3) $f(U \cup U') = f(U) \cup f(U')$.
$\overset{-1}{f}(V \cup V') = \overset{-1}{f}(V) \cup \overset{-1}{f}(V')$.

(4) $f(U \cap U') \subset f(U) \cap f(U')$.
$\overset{-1}{f}(V \cap V') = \overset{-1}{f}(V) \cap \overset{-1}{f}(V')$.

(5) $f(U \setminus U') \supset f(U) \setminus f(U')$.
$\overset{-1}{f}(V \setminus V') = \overset{-1}{f}(V) \setminus \overset{-1}{f}(V')$.

1.3.7

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung, I eine nichtleere Menge, und für jedes $i \in I$ sei $U_i \subset A$ und $V_i \subset B$. Dann gilt:

(1) $f(\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} f(U_i)$ *und* $f(\bigcap_{i\in I} U_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(U_i)$.

(2) $\overset{-1}{f}(\bigcup_{i\in I} V_i) = \bigcup_{i\in I} \overset{-1}{f}(V_i)$ *und* $\overset{-1}{f}(\bigcap_{i\in I} V_i) = \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{f}(V_i)$.

1.3.10

*$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung, $U \subset A$ und $V \subset B$ Teilmengen.
Dann gilt:*

(1) $U \subset \overset{-1}{f}(f(U))$.

(2) $V \supset f(\overset{-1}{f}(V))$.

1.3.14

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *f ist surjektiv.*

(ii) *Für jede Teilmenge $V \subset B$ gilt $f(\overset{-1}{f}(V)) = V$.*

(iii) *Für jedes $b \in B$ gilt $f(\overset{-1}{f}(\{b\})) = \{b\}$.*

(iv) *Für jedes $b \in B$ enthält $\overset{-1}{f}(\{b\})$ mindestens ein Element* (d.h. *für jedes $b \in B$ ist $\overset{-1}{f}(\{b\}) \neq \emptyset$*).

(v) $f(A) = B$.

1.3.15

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *f ist injektiv.*

(ii) *Für jede Teilmenge $U \subset A$ gilt $\overset{-1}{f}(f(U)) = U$.*

(iii) *Für jedes $a \in A$ gilt $\overset{-1}{f}(f(\{a\}) = \{a\}$.*

(iv) *Für jedes $b \in B$ gilt: $\overset{-1}{f}(\{b\})$ enthält höchstens ein Element.*

(v) *Für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt: $(a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2).)$*

1.3.16

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung. Dann gilt:

(1) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

  (i) *f ist injektiv.*

  (ii) *Für alle $U_1, U_2 \subset A$ gilt: $(U_1 \subset U_2 \Longleftrightarrow f(U_1) \subset f(U_2))$.*

  (iii) *Für alle $U_1, U_2 \subset A$ gilt: $f(U_1 \cap U_2) = f(U_1) \cap f(U_2)$.*

  (iv) *Für alle $U_1, U_2 \subset A$ gilt: $f(U_1 \backslash U_2) = f(U_1) \backslash f(U_2)$.*

(2) *Äquivalent sind:*

  (i) *f ist surjektiv.*

  (ii) *Für alle $V_1, V_2 \subset B$ gilt: $(V_1 \subset V_2 \Longleftrightarrow \overset{-1}{f}(V_1) \subset \overset{-1}{f}(V_2))$.*

1.3.17

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung. Dann gilt:
f ist genau dann bijektiv, wenn es zu jedem $b \in B$ genau ein $a \in A$ mit $b = f(a)$ gibt.

1.3.21

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung.
Zeigen Sie:

$$f \circ id_A = f = id_B \circ f.$$

1.3.22

$f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C, h : C \longrightarrow D$ seien Abbildungen. Dann gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

1.3.23

$f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen, U sei eine Teilmenge von A, V eine Teilmenge von C. Dann gilt:

(1) *$(g \circ f)(U) = g(f(U))$.*

(2) *$\overset{-1}{(g \circ f)}(V) = \overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(V))$.*

1.3.24

$f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen. Dann gilt:

(1) *Sind f und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.*

(2) *Sind f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.*

(3) *Sind f und g bijektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv.*

1.3.25

$f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen. Dann gilt:

(1) *Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.*

(2) *Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.*

1.3.26

(1) *$f : A \longrightarrow B, g_1 : B \longrightarrow C, g_2 : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen. Dann gilt: Ist $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ und f surjektiv, so ist $g_1 = g_2$.*

(2) *$f_1 : A \longrightarrow B, f_2 : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ seien Abbildungen. Dann gilt: Ist $g \circ f_1 = g \circ f_2$ und g injektiv, so ist $f_1 = f_2$.*

1.3.27

$f : A \longrightarrow B$ sei eine bijektive Abbildung. Durch

$$\begin{aligned} f^{-1} \;:\; & B \longrightarrow A \\ & f^{-1}(b) := a, \quad \textit{falls} \quad f(a) = b \quad \textit{ist} \quad , \end{aligned}$$

ist eine Abbildung definiert, für welche die Identitäten

$$f^{-1} \circ f = id_A \quad \textit{und} \quad f \circ f^{-1} = id_B$$

gelten.

1.3.30

$f : A \longrightarrow B$ sei eine Abbildung. Dann gilt: Gibt es eine Abbildung $g : B \longrightarrow A$, die den Gleichungen

$$g \circ f = id_A \;\; \textit{und} \;\; f \circ g = id_B$$

genügt, so ist f bijektiv und g die Umkehrabbildung von f.

1.3.31

(1) *$f : A \longrightarrow B$ sei eine bijektive Abbildung. Dann ist auch f^{-1} bijektiv, und es gilt*

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

(2) *$f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$ seien bijektive Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f$ bijektiv, und es gilt*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

1.4.10

Es sei $n \in \mathbb{N}$ *und* M *eine Menge. Dann ist die durch*

$$\begin{aligned} \phi \quad : \quad & \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_n, M) \longrightarrow M^n \\ & f \longmapsto (f(1), f(2), \ldots, f(n)) \end{aligned}$$

gegebene Abbildung eine Bijektion.

1.4.19

A, B *seien Mengen und* R *eine Relation zwischen* A *und* B. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gibt eine Abbildung* $f : A \to B$ *mit* $R = G_f$.

(ii) *Zu jedem* $a \in A$ *gibt es genau ein* $b \in B$ *mit* $(a, b) \in R$.

1.4.23

M *sei eine Menge und* R *sei eine Relation auf* M. Δ_M *sei die Diagonale von* M, R^{-1} *die Umkehrrelation von* R *und* $R \circ R$ *die durch*

$$R \circ R := \{(x, y) \mid x, y \in M \quad \textit{und es gibt ein} \quad z \in M \quad \textit{mit} \quad xRz \quad \textit{und} \quad zRy\}$$

gegebene Relation auf M. *Dann gilt:*

(1) R *ist reflexiv* $\iff$ $\Delta_M \subset R$.

(2) R *ist symmetrisch* $\iff$ $R = R^{-1}$.

(3) R *ist transitiv* $\iff$ $R \circ R \subset R$.

(4) R *ist antisymmetrisch* $\iff$ $R \cap R^{-1} \subset \Delta_M$.

(5) R *ist linear* $\iff$ $R \cup R^{-1} = M \times M$.

1.5.5

M sei eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann gilt:

(1) *Für jedes $x \in M$ gilt $x \in [x]$.*

(2) $M = \bigcup\{[x] \mid x \in M\}$.

(3) *Für alle $x, y \in M$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

  (i) $x \sim y$.
  (ii) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.
  (iii) $[x] = [y]$.

(4) *Die kanonische Projektion $\pi : M \to M/\sim$ ist surjektiv.*

1.5.8

$f : A \to B$ sei eine Abbildung, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A und π die zugehörige kanonische Projektion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *Es gibt genau eine Abbildung $\bar{f} : A/\sim \ \to B$ mit $f = \bar{f} \circ \pi$.*
(ii) *Für alle $x, y \in A$ gilt:*

$$x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y).$$

Ist für f und $\sim$ die Bedingung (ii) erfüllt, so heißt die nach (i) gegebene Abbildung $\bar{f}$ **die durch f auf $A/\sim$ induzierte Abbildung**.

1.5.10

$f : A \to B$ sei eine Abbildung. Definiert man für $x, y \in A$

$$x \sim y \quad \mathrm{mod} \quad R(f) :\Longleftrightarrow f(x) = f(y),$$

so ist die hierdurch gegebene Relation $R(f)$ eine Äquivalenzrelation auf A.
$R(f)$ heißt **die durch f induzierte Äquivalenzrelation** (auf A).

1.5.12

$f : A \to B$ sei eine Abbildung und $R(f)$ die auf A durch f induzierte Äquivalenzrelation. Dann gilt:

(1) *Die kanonische Projektion*

$$\begin{aligned} \pi_{R(f)} \quad : \quad A &\longrightarrow A/R(f) \\ x &\longmapsto [x]_{R(f)} \end{aligned}$$

ist surjektiv.

(2) *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \tilde{f} \quad : \quad A/R(f) &\longrightarrow f(A) \\ [x]_{R(f)} &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

ist bijektiv.

(3) *Die Inklusionsabbildung*

$$\begin{aligned} in_{f(A),B} \quad : \quad f(A) &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

ist injektiv.

(4) *Es gilt* $f = in_{f(A),B} \circ \tilde{f} \circ \pi_{R(f)}$.
Diese Gleichung heißt die **kanonische Faktorisierung** (oder **kanonische Bildzerlegung)** von f.

1.5.14

M sei eine Menge.

(1) $\mathfrak{Z}$ *sei eine Partition auf* M. *Definiert man für* $x, y \in M$

$$x \sim y \quad mod \quad R(\mathfrak{Z}) :\Longleftrightarrow \quad \text{Es gibt ein} \quad Z \in \mathfrak{Z} \quad \text{mit} \quad x \in Z \quad \text{und} \quad y \in Z,$$

so gilt:

- (a) $R(\mathfrak{Z})$ *ist eine Äquivalenzrelation auf* M.
  $R(\mathfrak{Z})$ heißt die **von $\mathfrak{Z}$ induzierte Äquivalenzrelation.**
- (b) $M/R(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{Z}$, *d.h. die zu* $R(\mathfrak{Z})$ *gehörige Klasseneinteilung stimmt mit* $\mathfrak{Z}$ *überein.*

(2) *R sei eine Äquivalenzrelation auf M. Dann gilt:*

- (a) *M/R ist eine Partition auf M.*
- (b) $R(M/R) = R$, *d.h. die von M/R induzierte Äquivalenzrelation ist wiederum R.*

1.5.26

$(M, \leq)$ sei eine geordnete Menge, $N \subset M$ eine Teilmenge von M und $x \in M$. Dann gilt:

(1) *x ist Maximum <Minimum> von $N \Rightarrow x$ ist maximales <minimales> Element von N, und x ist dann das einzige maximale <minimale> Element von N.*

(2) *Ist N eine linear geordnete Teilmenge von N, so gilt: x ist maximales <minimales> Element von $N \Rightarrow x$ ist Maximum <Minimum> von N.*

(3) *N besitzt höchstens ein Maximum <Minimum>.*

1.5.30

$(M, \leq)$ sei eine geordnete Menge.
Besitzt jede linear geordnete Teilmenge von M eine obere Schranke in M, so existiert in M ein maximales Element.

1.6.1

Prinzip vom kleinsten Element
Für die natürliche Ordnung auf $\mathbb{N}$ *gilt:*
Zu jeder nichtleeren Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ *existiert* $\min M$.

1.6.2

Prinzip der vollständigen Induktion

$\mathcal{E}$ *sei eine für natürliche Zahlen sinnvolle Eigenschaft* (d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ stehe prinzipiell fest, ob $\mathcal{E}$ auf n zutrifft oder nicht), *für die gilt:*

(i) $\mathcal{E}$ *trifft auf* 1 *zu.*
(ii) *Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *gilt: Trifft* $\mathcal{E}$ *auf* n *zu, so trifft* $\mathcal{E}$ *auch auf* $n+1$ *zu.*

Dann trifft $\mathcal{E}$ *auf jede natürliche Zahl zu.*

1.6.4

Induktionsaxiom
M *sei eine Teilmenge der natürlichen Zahlen mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $1 \in M$.
(ii) *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:* $n \in M \Rightarrow n+1 \in M$.

Dann ist $M = \mathbb{N}$.

1.6.8

$(M, \leq)$ *sei eine endliche geordnete Menge,* $M \neq \emptyset$. *Dann existiert in* M *ein minimales und ein maximales Element.*