# Musterlösung Zwischenklausur zu Informatik 1 WS 98/99

Andreas Rossberg, Timo von Oertzen

## **Aufgabe Z.1:** Wörter und Bäume (2+2 Punkte)

Sei eine Menge $X$ gegeben. Definieren Sie als rekursive Funktionen:

(a) die Konkatenation $\cdot : X^* \times X^* \to X^*$ zweier Wörter.

$$\begin{aligned} \epsilon \cdot v &= v \\ (x, u) \cdot v &= (x, u \cdot v) \end{aligned}$$

(b) die Grenze $\gamma : Baum(X) \to X^*$ eines Baumes.

$$\begin{aligned} \gamma((x, \epsilon)) &= x \\ \gamma((x, b_1 \ldots b_n)) &= \gamma(b_1) \cdot \ldots \cdot \gamma(b_n) \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: $X^* = \{\epsilon\} \cup X \times X^*$ und $Baum(X) = X \times (Baum(X))^*$.

**Aufgabe Z.2:** Grammatiken (1+2+2 Punkte)

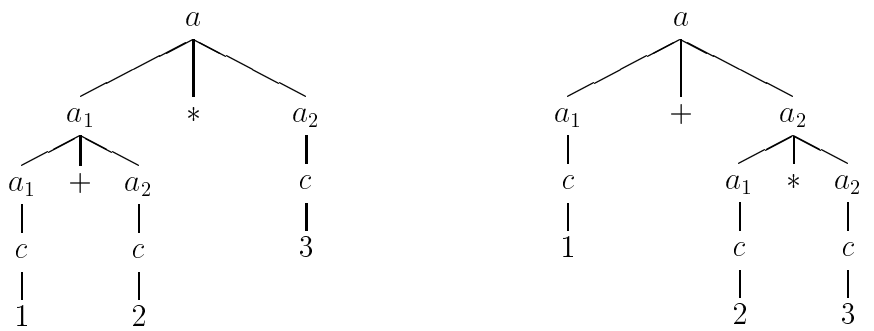
Folgende Grammatik $G_1$ sei in BNF gegeben:

$$
\begin{array}{lcl}
c & ::= & 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \\
a & ::= & c \mid a_1 + a_2 \mid a_1 * a_2
\end{array}
$$

(a) Geben Sie die Menge $N$ der Nonterminale und die Menge $T$ der Terminale dieser Grammatik an.

$$
\begin{array}{rcl}
N & = & \{\, a,\ c \,\} \\
T & = & \{\, 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ +,\ * \,\}
\end{array}
$$

(b) Zeichnen Sie alle möglichen Ableitungsbäume für den Ausdruck "$1 + 2 * 3$".




(c) Geben Sie eine eindeutige Grammatik $G_2$ an, die dieselben Phrasen für $a$ erzeugt wie $G_1$. Dabei soll $*$ stärker binden als $+$, und beide Operatoren sollen linksassoziativ sein.

$$
\begin{array}{lcl}
c & ::= & 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \\
b & ::= & c \mid b * c \\
a & ::= & b \mid a + b
\end{array}
$$

**Aufgabe Z.3:** Statische Semantik (1+2 Punkte)

Vervollständigen Sie die folgenden Inferenzregeln für die statische Semantik von MML:

(a)

$$\frac{\begin{array}{c} T(x) = n \\ T \vdash a_1 \qquad \cdots \qquad T \vdash a_n \end{array}}{T \vdash x\texttt{(}a_1\texttt{,} \cdots \texttt{,}a_n\texttt{)}}$$

(b)

$$\frac{\begin{array}{c} x_1, \cdots, x_n \text{ paarweise verschieden} \\ T' = \{x \mapsto n\} \\ T'' = \{x_1 \mapsto 0, \cdots, x_n \mapsto 0\} \\ T + T' + T'' \vdash a \end{array}}{T \vdash \texttt{fun}\ x\texttt{(}x_1\texttt{,} \cdots \texttt{,}x_n\texttt{)}\ \texttt{=}\ a \Rightarrow T'}$$

**Aufgabe Z.4:** Dynamische Semantik (2+2 Punkte)

Vervollständigen Sie die folgenden Inferenzregeln für die dynamische Semantik von MML:

(a)

$$\frac{W' = \{x \mapsto (\texttt{fun}\ x\texttt{(}x_1\texttt{,} \cdots \texttt{,}x_n\texttt{)}\ \texttt{=}\ a, W)\}}{W \vdash \texttt{fun}\ x\texttt{(}x_1\texttt{,} \cdots \texttt{,}x_n\texttt{)}\ \texttt{=}\ a \Rightarrow W'}$$

(b)

$$\frac{\begin{array}{c} W(x) = (\texttt{fun}\ x\texttt{(}x_1\texttt{,} \cdots \texttt{,}x_n\texttt{)}\ \texttt{=}\ a, W') \\ W \vdash a_1 \Rightarrow z_1 \qquad \cdots \qquad W \vdash a_n \Rightarrow z_n \\ W'' = \{x \mapsto W(x)\} \\ W''' = \{x_1 \mapsto z_1, \cdots, x_n \mapsto z_n\} \\ W' + W'' + W''' \vdash a \Rightarrow z \end{array}}{W \vdash x\texttt{(}a_1\texttt{,} \cdots \texttt{,}a_n\texttt{)} \Rightarrow z}$$

**Aufgabe Z.5:** Typumgebungen (2 Punkte)

Betrachten Sie folgendes MML-Programm:

```
fun f(n)   = op*(n,n);
fun g(n)   = if n = 1 then 1 else op*(n, g(op-(n,1)));
fun h(m,n) = op-(f(n), g(n));
h(6,2);
```

Geben Sie die Typumgebung $T$ an, die gemäß der statischen Semantik von MML für den Rumpf der Prozedur `h` verwendet wird (ohne Herleitung):

$$T \;=\; T_0 \;+\; \{\, \mathtt{f} \mapsto 1,\ \mathtt{g} \mapsto 1,\ \mathtt{h} \mapsto 2,\ \mathtt{m} \mapsto 0,\ \mathtt{n} \mapsto 0 \,\}$$

**Aufgabe Z.6:** Divergenz (2 Punkte)

Gegeben seien folgende Prozedurdeklarationen:

```
fun f(n)   = n*n
fun g(n)   = if n = 1 then 1 else n * g(n-1)
fun h(m,n) = f(n) - g(n)
```

Für welche Paare $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ divergiert `h(`$m$`,`$n$`)`?

Für alle $(m, n) \in \mathbf{N} \times \{\mathbf{0}\}$.

**Aufgabe Z.7:** Kosten 1 (1+1+1+1+1 Punkte)

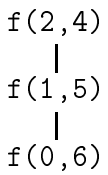
Gegeben ist folgende Prozedur:

```
fun f(0,n) = n
  | f(m,0) = m
  | f(m,n) = if m > n then f(m+1,n-1) else f(m-1,n+1)
```

(a) Ist `f`

- ☐ baumrekursiv?
- ☒ linearrekursiv?
- ☒ endrekursiv?

(b) Zeichnen Sie den Rekursionsbaum für `f(2,4)`. Welche Größe und welche Tiefe hat er?




Größe: 3

Tiefe: 2

(c) Was ist der Platzbedarf von `f(`$m$`,`$n$`)` (mit $\Theta$)?

$\Theta(1)$

(d) Ist die Laufzeit von `f(`$m$`,`$n$`)` mit $m, n \in \mathbf{N}$ in

- ☐ $O(1)$?
- ☒ $O(n)$?
- ☒ $O(m+n)$?
- ☒ $O(2^{m+n})$?
- ☒ $\Theta(\min\{m,n\})$?
- ☐ $\Theta(\max\{m,n\})$?

(e) Welche Funktion $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ berechnet `f(`$m$`,`$n$`)`?

$f(m,n) = m + n$

**Aufgabe Z.8:** Kosten 2 (1+1+1+1 Punkte)

Schreiben Sie verschiedene, möglichst einfache Prozeduren `f: int -> int`, so dass `f(`$n$`)` für $n \in \mathbf{N}$ jeweils die angegebene Laufzeit hat. Sie können die ganzzahlige Division $m$ `div` $n$ als primitive Prozedur mit konstanter Laufzeit verwenden.

(a) $\Theta(1)$

```
fun f(n) = 0
```

(b) $\Theta(\log n)$

```
fun f(0) = 0
  | f(n) = f(n div 2)
```

(c) $\Theta(n)$

```
fun f(0) = 0
  | f(n) = f(n-1)
```

(d) $\Theta(3^n)$

```
fun f(0) = 0
  | f(n) = f(n-1) + f(n-1) + f(n-1)
```

**Aufgabe Z.9:** Wohlfundiertheit (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktionsdefinition

$$
\begin{aligned}
&f \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N} \\
&f(m,n) = \text{ if } m = 0 \text{ then } n \\
&\qquad\quad \text{else if } n = 0 \text{ then } m \\
&\qquad\quad \text{else if } m > n \text{ then } f(m+1, n-1) \\
&\qquad\quad \text{else } f(m-1, n+1)
\end{aligned}
$$

wohlfundiert ist. Geben Sie dazu die zwei Bedingungen und die richtige wohlfundierte Relation an.

$$
\begin{aligned}
m > n > 0 \quad &\Rightarrow \quad (m,n) \succ (m+1, n-1) \\
n \geq m > 0 \quad &\Rightarrow \quad (m,n) \succ (m-1, n+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(m_1, n_1) \succ (m_2, n_2) \quad :\Leftrightarrow \quad & (m_1 > n_1 \wedge m_2 > m_1 \wedge n_2 < n_1) \\
\vee \quad & (m_1 \leq n_1 \wedge n_2 > n_1 \wedge m_2 < m_1)
\end{aligned}
$$

**Aufgabe Z.10:** Korrektheit (3+1 Punkte)

Gegeben sei die Funktionsdefinition

$$f \in \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$
$$f(n) = \text{if } n = 0 \text{ then } 0 \text{ else } n + f(n-1)$$

(a) Beweisen Sie durch Induktion:

$$\forall n \in \mathbf{N}: \quad f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktion über n:

Sei $n = 0$: Dann $f(n) = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Sei $n > 0$: Dann $f(n) = n + f(n-1) \overset{(*)}{=} n + \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{2n+(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

(*) nach Induktionsvoraussetzung

(b) Gegeben sei die Funktionsdefinition

$$g \in \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$
$$g(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweisen Sie $f = g$. Sie können dazu (a) benutzen.

Nach (a) erfüllt $f$ die definierende Gleichung von $g$, also gilt $f = g$.

**Aufgabe Z.11:** Endrekursion (3 Punkte)

Schreiben Sie eine endrekursive SML-Prozedur `sum`, die die Funktion

$$sum \in (\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}) \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$$
$$sum(f, m, n) = \text{if } m > n \text{ then } 0 \text{ else } f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

berechnet. Deklarieren Sie Hilfsprozeduren lokal. Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst eine einfache Version und transformieren Sie diese dann in endrekursive Form.

```
fun sum(f,m,n) =
    let
        fun sum(m,a) = if m > n then a else sum(m+1,a+f(m))
    in
        sum(m,0)
    end
```

**Aufgabe Z.12:** Typinferenz (1+1+1 Punkte)

Welchen Typ ordnen die folgenden SML-Deklarationen jeweils dem Identifikator `x` zu?

(a) `val (x, _) = ((2.0,(),"aua"), (4,true))`

```
x : real * unit * string
```

(b) `fun x(y) = (y::nil)::nil`

```
x : 'a -> 'a list list
```

(c) `val x = fn x => fn y => (x,y)`

```
x : 'a -> 'b -> 'a * 'b
```