Zwischenklausur zu Informatik 1 WS 98/99

Andreas Rossberg, Prof. Gert Smolka

23. Dezember 1998

Aufgabe Z.1: Wörter und Bäume (2+2 Punkte)

Sei eine Menge X gegeben. Definieren Sie als rekursive Funktionen:

(a) die Konkatenation $\cdot : X^* \times X^* \to X^*$ zweier Wörter.

(b) die Grenze $\gamma : Baum(X) \to X^*$ eines Baumes.

Zur Erinnerung: $X^* = \{\epsilon\} \cup X \times X^*$ und $Baum(X) = X \times (Baum(X))^*$.

Aufgabe Z.2: Grammatiken (1+2+2 Punkte)

Folgende Grammatik G_1 sei in BNF gegeben:

$$\begin{array}{lcl} c & ::= & 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \\ a & ::= & c \mid a_1 + a_2 \mid a_1 * a_2 \end{array}$$

(a) Geben Sie die Menge N der Nonterminale und die Menge T der Terminale dieser Grammatik an.

(b) Zeichnen Sie alle möglichen Ableitungsbäume für den Ausdruck "$1 + 2 * 3$".

(c) Geben Sie eine eindeutige Grammatik G_2 an, die dieselben Phrasen für a erzeugt wie G_1. Dabei soll $*$ stärker binden als $+$, und beide Operatoren sollen linksassoziativ sein.

Aufgabe Z.3: Statische Semantik (1+2 Punkte)

Vervollständigen Sie die folgenden Inferenzregeln für die statische Semantik von MML:

(a)

$$\frac{\begin{array}{c} T(x) = \texttt{-----} \\ \texttt{-----} \vdash a_1 \qquad \cdots \qquad \texttt{-----} \vdash a_n \end{array}}{T \vdash x\,\texttt{(}a_1\,\texttt{,}\,\cdots\,\texttt{,}a_n\texttt{)}}$$

(b)

$$\frac{\begin{array}{c} x_1, \cdots, x_n \text{ paarweise verschieden} \\ T' = \texttt{-----} \\ T'' = \texttt{-----} \\ T + T' + T'' \vdash a \end{array}}{T \vdash \texttt{fun}\ x\,\texttt{(}x_1\,\texttt{,}\,\cdots\,\texttt{,}x_n\texttt{)}\ \texttt{=}\ a \Rightarrow T'}$$

Aufgabe Z.4: Dynamische Semantik (2+2 Punkte)

Vervollständigen Sie die folgenden Inferenzregeln für die dynamische Semantik von MML:

(a)

$$\frac{W' = \texttt{-----}}{W \vdash \texttt{fun}\ x\,\texttt{(}x_1\,\texttt{,}\,\cdots\,\texttt{,}x_n\texttt{)}\ \texttt{=}\ a \Rightarrow W'}$$

(b)

$$\frac{\begin{array}{c} W(x) = \texttt{-----} \\ W \vdash a_1 \Rightarrow z_1 \qquad \cdots \qquad W \vdash a_n \Rightarrow z_n \\ W'' = \texttt{-----} \\ W''' = \texttt{-----} \\ W' + W'' + W''' \vdash a \Rightarrow z \end{array}}{W \vdash x\,\texttt{(}a_1\,\texttt{,}\,\cdots\,\texttt{,}a_n\texttt{)} \Rightarrow \texttt{-----}}$$

Aufgabe Z.5: Typumgebungen (2 Punkte)

Betrachten Sie folgendes MML-Programm:

```
fun f(n)   = op*(n,n);
fun g(n)   = if n = 1 then 1 else op*(n, g(op-(n,1)));
fun h(m,n) = op-(f(n), g(n));
h(6,2);
```

Geben Sie die Typumgebung T an, die gemäß der statischen Semantik von MML für den Rumpf der Prozedur `h` verwendet wird (ohne Herleitung):

$$T \;=\; T_0 \;+$$

Aufgabe Z.6: Divergenz (2 Punkte)

Gegeben seien folgende Prozedurdeklarationen:

```
fun f(n)   = n*n
fun g(n)   = if n = 1 then 1 else n * g(n-1)
fun h(m,n) = f(n) - g(n)
```

Für welche Paare $(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ divergiert `h(`m`,`n`)`?

Aufgabe Z.7: Kosten 1 (1+1+1+1+1 Punkte)

Gegeben ist folgende Prozedur:

```
fun f(0,n) = n
  | f(m,0) = m
  | f(m,n) = if m > n then f(m+1,n-1) else f(m-1,n+1)
```

(a) Ist `f`

- ☐ baumrekursiv?
- ☐ linearrekursiv?
- ☐ endrekursiv?

(b) Zeichnen Sie den Rekursionsbaum für `f(2,4)`. Welche Größe und welche Tiefe hat er?

(c) Was ist der Platzbedarf von `f(`m`,`n`)` (mit Θ)?

(d) Ist die Laufzeit von `f(`m`,`n`)` mit $m, n \in \mathbf{N}$ in

- ☐ $O(1)$?
- ☐ $O(n)$?
- ☐ $O(m+n)$?
- ☐ $O(2^{m+n})$?
- ☐ $\Theta(\min\{m,n\})$?
- ☐ $\Theta(\max\{m,n\})$?

(e) Welche Funktion $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ berechnet `f(`m`,`n`)`?

Aufgabe Z.8: Kosten 2 (1+1+1+1 Punkte)

Schreiben Sie verschiedene, möglichst einfache Prozeduren `f: int -> int`, so dass `f(`n`)` für $n \in \mathbf{N}$ jeweils die angegebene Laufzeit hat. Sie können die ganzzahlige Division m `div` n als primitive Prozedur mit konstanter Laufzeit verwenden.

(a) $\Theta(1)$

(b) $\Theta(\log n)$

(c) $\Theta(n)$

(d) $\Theta(3^n)$

Aufgabe Z.9: Wohlfundiertheit (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktionsdefinition

$$\begin{aligned}
&f \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N} \\
&f(m,n) = \text{ if } m = 0 \text{ then } n \\
&\qquad\qquad\quad \text{else if } n = 0 \text{ then } m \\
&\qquad\qquad\quad \text{else if } m > n \text{ then } f(m+1, n-1) \\
&\qquad\qquad\quad \text{else } f(m-1, n+1)
\end{aligned}$$

wohlfundiert ist. Geben Sie dazu die zwei Bedingungen und die richtige wohlfundierte Relation an.

Aufgabe Z.10: Korrektheit (3+1 Punkte)

Gegeben sei die Funktionsdefinition

$$\begin{aligned}&f \in \mathbf{N} \to \mathbf{N}\\&f(n) = \text{if } n = 0 \text{ then } 0 \text{ else } n + f(n-1)\end{aligned}$$

(a) Beweisen Sie durch Induktion:

$$\forall n \in \mathbf{N} : \quad f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) Gegeben sei die Funktionsdefinition

$$\begin{aligned}&g \in \mathbf{N} \to \mathbf{N}\\&g(n) = \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Beweisen Sie $f = g$. Sie können dazu (a) benutzen.

Aufgabe Z.11: Endrekursion (3 Punkte)

Schreiben Sie eine endrekursive SML-Prozedur `sum`, die die Funktion

$$\begin{aligned} &sum \in (\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}) \times \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \\ &sum(f, m, n) = \text{if } m > n \text{ then } 0 \text{ else } f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n) \end{aligned}$$

berechnet. Deklarieren Sie Hilfsprozeduren lokal. Hinwies: Überlegen Sie sich zunächst eine einfache Version und transformieren Sie diese dann in endrekursive Form.

Aufgabe Z.12: Typinferenz (1+1+1 Punkte)

Welchen Typ ordnen die folgenden SML-Deklarationen jeweils dem Identifikator `x` zu?

(a) `val (x, _) = ((2.0,(),"aua"), (4,true))`

(b) `fun x(y) = (y::nil)::nil`

(c) `val x = fn x => fn y => (x,y)`