

Übungsblatt 14
Jan Hendrik Dithmar
Übungsgruppe 2

Aufgabe 1

$t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & t^2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 & t^2 - 2t + 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 3 & t^2 - t + 1 \\ 4 & 1 & 3 & -1 & 0 & t \end{array} \right) \quad (*) \\
 & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & t^2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & -t^2 - 2t + 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2t^2 - t + 1 \\ 0 & -3 & -5 & -5 & -4 & -4t^2 + t \end{array} \right) \\
 & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & t^2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & -t^2 - 2t + 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 4 & -5t + 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -4 & -t^2 + 7t - 3 \end{array} \right) \\
 & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & t^2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & -t^2 - 2t + 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 4 & -5t + 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t^2 + 2t \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $-t^2 + 2t \neq 0$ besitzt das Gleichungssystem $(*)$ keine Lösung. Betrachte nun:

$$\begin{aligned}
 -t^2 + 2t = 0 & \Leftrightarrow -t \cdot (t - 2) = 0 \\
 & \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 2
 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem $(*)$ besitzt Lösungen genau dann, wenn gilt:

$$t = 0 \vee t = 2$$

1. Fall: $t = 0$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sei $x_5 = \mu$ und sei $x_4 = \lambda$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 2x_3 - 4\lambda + 4\mu = 3 & \Leftrightarrow 2x_3 = 3 + 4\lambda - 4\mu \\
 & \Leftrightarrow x_3 = \frac{3}{2} + 2\lambda - 2\mu
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow -x_2 - 1 \cdot \left(\frac{3}{2} + 2\lambda - 2\mu\right) - 3\lambda &= 1 \\
-x_2 - \frac{3}{2} - 2\lambda + 2\mu - 3\lambda &= 1 \\
x_2 &= -\frac{5}{2} - 5\lambda + 2\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow x_1 - \frac{5}{2} - 5\lambda + 2\mu + 3 + 4\lambda - 4\mu + \lambda + \mu &= 0 \\
x_1 + \frac{1}{2} - \mu &= 0 \\
\Leftrightarrow x_1 &= -\frac{1}{2} + \mu
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \mu \\ -\frac{5}{2} - 5\lambda + 2\mu \\ \frac{3}{2} + 2\lambda - 2\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis 1: Für $t = 0$ ist

$$\text{Lös}(A, b) = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \mid x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Fall: $t = 2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sei $x_5 = \beta$ und sei $x_4 = \alpha$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\begin{aligned} 2x_3 - 4\alpha + 4\beta = -7 &\Leftrightarrow 2x_3 = -7 + 4\alpha - 4\beta \\ &\Leftrightarrow x_3 = -\frac{7}{2} + 2\alpha - 2\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -x_2 - 1 \cdot \left(-\frac{7}{2} + 2\alpha - 2\beta\right) - 3\alpha &= -7 \\ -x_2 + \frac{7}{2} - 2\alpha + 2\beta - 3\alpha &= -7 \\ x_2 &= \frac{21}{2} - 5\alpha + 2\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1 + \frac{21}{2} - 5\alpha + 2\beta - 7 + 4\alpha - 4\beta + \alpha + \beta &= 4 \\ x_1 + \frac{7}{2} - \beta &= 4 \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{1}{2} + \beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \beta \\ \frac{21}{2} - 5\alpha + 2\beta \\ -\frac{7}{2} + 2\alpha - 2\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{21}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis 2: Für $t = 2$ ist

$$\text{Lös}(A, b) = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \mid x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{21}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \alpha \in \mathbb{R} \wedge \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Z}/7)$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

(a)

$G := Gl(n, K) \times Gl(m, K)$ ist eine Gruppe mit der Gruppenverknüpfung

$\cdot : G \times G \rightarrow G; ((B', A'), (B, A)) \mapsto (B', A') \cdot (B, A)$ mit $(B', A') \cdot (B, A) = (B' \cdot B, A' \cdot A)$

Das neutrale Element in G ist $e = (E_n, E_m)$.

Behauptung: $\cdot : G \times M(n \times m, K) \rightarrow M(n \times m, K); ((B, A), C) \mapsto BCA^{-1}$ ist eine Gruppenoperation auf M .

Dazu ist zu zeigen:

(1) $g' \cdot (g \cdot c) = (g' \cdot g) \cdot c \quad \forall g', g \in G, c \in M$

(2) $e \cdot c = c \quad \forall c \in M$

Beweis:

zu (1):

Seien $(B', A'), (B, A) \in G$ beliebig, sei $C \in M(n \times m, K)$ beliebig.

$$\begin{aligned} (B', A') \cdot ((B, A) \cdot C) &= (B', A') \cdot BCA^{-1} \\ &= B'BCA^{-1}A'^{-1} \\ &= B'BC(A'A)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((B', A') \cdot (B, A)) \cdot C &= (B' \cdot B, A' \cdot A) \cdot C \\ &= B'BC(A'A)^{-1} \end{aligned}$$

Somit ist (1): $(B', A') \cdot ((B, A) \cdot C) = ((B', A') \cdot (B, A)) \cdot C$ bewiesen.

zu (2):

Sei $C \in M(n \times m, K)$ beliebig.

$$\begin{aligned} (E_n, E_m) \cdot C &= E_n \cdot C \cdot E_m^{-1} = E_n C E_m \\ &= E_n \cdot (C \cdot E_m) = E_n \cdot C = C \end{aligned}$$

Damit ist (2): $(E_n, E_m) \cdot C = C$ bewiesen. □

Aufgabe 4

Seien $a_1, \dots, a_{d+1} \in \mathbb{R}$.

Beh.:

$$(*) \det A = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^d \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{d+1} & a_{d+1}^2 & \dots & a_{d+1}^d \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq d+1} (a_j - a_i)$$

Beweis durch vollständige Induktion nach d :

Bemerkung: $d = 0$ ist nicht möglich, da aus $1 \leq i < j \leq 1$ folgen würde: $1 < 1$

Induktionsanfang:

Die Beh. ist für $d = 1$ richtig, denn:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

$$\prod_{1 \leq i < j \leq 2} (a_j - a_i) = \prod_{i=1 \wedge j=2} (a_j - a_i) = a_2 - a_1 \quad (\text{ok})$$

Induktionsvoraussetzung:

Die Beh. sei für $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ für jede Determinante, die die Form $(*)$ hat, richtig; die Behauptung sei also auch für die folgende Determinante, die wie $(*)$ „aufgebaut“

ist, richtig:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{d-1} & a_2^d \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{d-1} & a_3^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{d+1} & a_{d+1}^2 & \dots & a_{d+1}^{d-1} & a_{d+1}^d \\ 1 & a_{d+2} & a_{d+2}^2 & \dots & a_{d+2}^{d-1} & a_{d+2}^d \end{vmatrix} = \prod_{2 \leq i < j \leq d+2} (a_j - a_i)$$

Induktionsbehauptung:

Dann gilt die Behauptung auch für $d+1$, d.h.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{d-1} & a_1^d & a_1^{d+1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{d-1} & a_2^d & a_2^{d+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{d+1} & a_{d+1}^2 & \dots & a_{d+1}^{d-1} & a_{d+1}^d & a_{d+1}^{d+1} \\ 1 & a_{d+2} & a_{d+2}^2 & \dots & a_{d+2}^{d-1} & a_{d+2}^d & a_{d+2}^{d+1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq d+2} (a_j - a_i)$$

Induktionsbegründung:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_2^d - a_1 a_2^{d-1} & a_2^{d+1} - a_1 a_2^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{d+1} - a_1 & a_{d+1}^2 - a_1 a_{d+1} & \dots & a_{d+1}^d - a_1 a_{d+1}^{d-1} & a_{d+1}^{d+1} - a_1 a_{d+1}^d \\ 1 & a_{d+2} - a_1 & a_{d+2}^2 - a_1 a_{d+2} & \dots & a_{d+2}^d - a_1 a_{d+2}^{d-1} & a_{d+2}^{d+1} - a_1 a_{d+2}^d \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2 \cdot (a_2 - a_1) & \dots & a_2^{d-1} \cdot (a_2 - a_1) & a_2^d \cdot (a_2 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{d+1} - a_1 & a_{d+1}(a_{d+1} - a_1) & \dots & a_{d+1}^{d-1} \cdot (a_{d+1} - a_1) & a_{d+1}^d \cdot (a_{d+1} - a_1) \\ 1 & a_{d+2} - a_1 & a_{d+2}(a_{d+2} - a_1) & \dots & a_{d+2}^{d-1} \cdot (a_{d+2} - a_1) & a_{d+2}^d \cdot (a_{d+2} - a_1) \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der 1. Zeile ergibt:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 \cdot (a_2 - a_1) & a_2 \cdot (a_2 - a_1) & \dots & a_2^{d-1} \cdot (a_2 - a_1) & a_2^d \cdot (a_2 - a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 \cdot (a_{d+1} - a_1) & a_{d+1} \cdot (a_{d+1} - a_1) & \dots & a_{d+1}^{d-1} \cdot (a_{d+1} - a_1) & a_{d+1}^d \cdot (a_{d+1} - a_1) \\ 1 \cdot (a_{d+2} - a_1) & a_{d+2} \cdot (a_{d+2} - a_1) & \dots & a_{d+2}^{d-1} \cdot (a_{d+2} - a_1) & a_{d+2}^d \cdot (a_{d+2} - a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1) \cdot \dots \cdot (a_{d+1} - a_1) \cdot (a_{d+2} - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \dots & a_2^{d-1} & a_2^d \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{d+1} & \dots & a_{d+1}^{d-1} & a_{d+1}^d \\ 1 & a_{d+2} & \dots & a_{d+2}^{d-1} & a_{d+2}^d \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{j=2}^{d+2} (a_j - a_1) \cdot \underbrace{\prod_{2 \leq i < j \leq d+2} (a_j - a_i)}_{\text{nach Ind. Vor.}} = \prod_{1 \leq i < j \leq d+2} (a_j - a_i)$$

Aufgabe 5

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & w & y \\ v & x & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot u + d \cdot v & a \cdot w + d \cdot x & a \cdot y + d \cdot z \\ b \cdot u + e \cdot v & b \cdot w + e \cdot x & b \cdot y + e \cdot z \\ c \cdot u + f \cdot v & c \cdot w + f \cdot x & c \cdot y + f \cdot z \end{pmatrix} = C$$

$$\begin{aligned}
\det C &= (a \cdot u + d \cdot v) \cdot (b \cdot w + e \cdot x) \cdot (c \cdot y + f \cdot z) \\
&+ (a \cdot w + d \cdot x) \cdot (b \cdot y + e \cdot z) \cdot (c \cdot u + f \cdot v) \\
&+ (a \cdot y + d \cdot z) \cdot (b \cdot u + e \cdot v) \cdot (c \cdot w + f \cdot x) \\
&- (a \cdot y + d \cdot z) \cdot (b \cdot w + e \cdot x) \cdot (c \cdot u + f \cdot v) \\
&- (a \cdot w + d \cdot x) \cdot (b \cdot u + e \cdot v) \cdot (c \cdot y + f \cdot z) \\
&- (a \cdot u + d \cdot v) \cdot (b \cdot y + e \cdot z) \cdot (c \cdot w + f \cdot x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det C &= (abuw + aeux + bdvw + devx) \cdot (cy + fz) \\
&- (abuw + aevw + bdux + devx) \cdot (cy + fz) \\
&+ (abwy + aewz + bdxxy + dexz) \cdot (cu + fv) \\
&- (abwy + aexy + bdwz + dexz) \cdot (cu + fv) \\
&+ (abuy + aevy + bduz + devz) \cdot (cw + fx) \\
&- (abuy + aeuz + bdvy + devz) \cdot (cw + fx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det C &= (aeux + bdvw) \cdot (cy + fz) - (aevw + bdux) \cdot (cy + fz) \\
&+ (aewz + bdxxy) \cdot (cu + fv) - (aexy + bdwz) \cdot (cu + fv) \\
&+ (aevy + bduz) \cdot (cw + fx) - (aeuz + bdvy) \cdot (cw + fx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det C &= aceuxy + aefuxz + bcdvwy + bdfvwx \\
&- aceuxy - aefuxz - bcdvwy - bdfvwx \\
&+ aceuwz + aefvwz + bcdxxy + bdfvxy \\
&- aceuwz - aefvwz - bcdxxy - bdfvxy \\
&+ acevwy + aefvxy + bcduwz + bdfuxz \\
&- acevwy - aefvxy - bcduwz - bdfuxz
\end{aligned}$$

$$\det C = 0$$

Also: $\det A \cdot B = 0$.