

Übungsblatt 13

Jan Hendrik Dithmar

Übungsgruppe 2

Aufgabe 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & 10 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -4 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -4 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -16 & 3 & -24 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -24 & -3 & -24 & 3 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -4 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -16 & 3 & -24 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -15 & 24 & 3 & 6 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -4 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -16 & 3 & -24 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -15 & 24 & 3 & 6 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 6 & -8 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 4 & -4 & 3 & 0 & 9 & 6 & -8 & 4 \\ 0 & -16 & 3 & 0 & 49 & 34 & -48 & 19 \\ 0 & 0 & -15 & 0 & -45 & -30 & 40 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 6 & -8 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 20 & -20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -80 & 0 & 0 & 200 & 140 & -200 & 80 \\ 0 & 0 & -15 & 0 & -45 & -30 & 40 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 6 & -8 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} -80 & 0 & 0 & 0 & 200 & 140 & -200 & 60 \\ 0 & -80 & 0 & 0 & 200 & 140 & -200 & 80 \\ 0 & 0 & -15 & 0 & -45 & -30 & 40 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 6 & -8 & 3 \end{array}$$

$$1 \ 0 \ 0 \ 0 \mid -\frac{5}{2} \ -\frac{7}{4} \ \frac{5}{2} \ -\frac{3}{4}$$

$$0 \ 1 \ 0 \ 0 \mid -\frac{5}{2} \ -\frac{7}{4} \ \frac{5}{2} \ -1$$

$$0 \ 0 \ 1 \ 0 \mid 3 \ 2 \ -\frac{8}{3} \ 1$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 1 \mid 2 \ \frac{3}{2} \ -2 \ \frac{3}{4}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{5}{2} & -1 \\ 3 & 2 & -\frac{8}{3} & 1 \\ 2 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{30}{12} & -\frac{21}{12} & \frac{30}{12} & -\frac{9}{12} \\ -\frac{30}{12} & -\frac{21}{12} & \frac{30}{12} & -\frac{12}{12} \\ \frac{36}{12} & \frac{24}{12} & -\frac{32}{12} & \frac{12}{12} \\ \frac{24}{12} & \frac{18}{12} & -\frac{24}{12} & \frac{9}{12} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -30 & -21 & 30 & -9 \\ -30 & -21 & 30 & -12 \\ 36 & 24 & -32 & 12 \\ 24 & 18 & -24 & 9 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
 A \cdot A^{-1} &= \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & 10 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -30 & -21 & 30 & -9 \\ -30 & -21 & 30 & -12 \\ 36 & 24 & -32 & 12 \\ 24 & 18 & -24 & 9 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_n
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Zu zeigen ist: $\Phi : V_d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraumisomorphismus.

Beweis:

1. z.z.: $\Phi : V_d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ ist $\mathbb{R}$ -linear, d.h. Φ ist ein Homomorphismus der $\mathbb{R}$ -Vektorräume V_d und $\mathbb{R}^{d+1}$.

(a)

Seien $p, q \in V_d$ beliebig.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \Phi(p+q) &= ((p+q)(a_1), (p+q)'(a_1), \dots, (p+q)^{(m_1-1)}(a_1), \dots, \\
 &\quad (p+q)(a_r), (p+q)'(a_r), \dots, (p+q)^{(m_r-1)}(a_r)) \\
 &= (p(a_1) + q(a_1), p'(a_1) + q'(a_1), \dots, p^{(m_1-1)}(a_1) + q^{(m_1-1)}(a_1), \dots, \\
 &\quad p(a_r) + q(a_r), p'(a_r) + q'(a_r), \dots, p^{(m_r-1)}(a_r) + q^{(m_r-1)}(a_r)) \\
 &= (p(a_1), p'(a_1), \dots, p^{(m_1-1)}(a_1), \dots, p(a_r), p'(a_r), \dots, p^{(m_r-1)}(a_r)) \\
 &\quad + (q(a_1), q'(a_1), \dots, q^{(m_1-1)}(a_1), \dots, q(a_r), q'(a_r), \dots, q^{(m_r-1)}(a_r)) \\
 &= \Phi(p) + \Phi(q)
 \end{aligned}$$

(b)

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, sei $p \in V_d$ beliebig.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \Phi(\lambda p) &= ((\lambda \cdot p)(a_1), (\lambda \cdot p)'(a_1), \dots, (\lambda \cdot p)^{(m_1-1)}(a_1), \dots, \\
 &\quad (\lambda \cdot p)(a_r), (\lambda \cdot p)'(a_r), \dots, (\lambda \cdot p)^{(m_r-1)}(a_r)) \\
 &= (\lambda \cdot p(a_1), \lambda \cdot p'(a_1), \dots, \lambda \cdot p^{(m_1-1)}(a_1), \dots, \\
 &\quad \lambda \cdot p(a_r), \lambda \cdot p'(a_r), \dots, \lambda \cdot p^{(m_r-1)}(a_r)) \\
 &= \lambda \cdot (p(a_1), p'(a_1), \dots, p^{(m_1-1)}(a_1), \dots, p(a_r), p'(a_r), \dots, p^{(m_r-1)}(a_r)) \\
 &= \lambda \cdot \Phi(p)
 \end{aligned}$$

1.(a) und 1.(b): $\Rightarrow \Phi : V_d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ ist $\mathbb{R}$ -linear.

2. z.z.: $\Phi : V_d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ ist injektiv.

Seien $p, q \in V_d$ mit $\Phi(p) = \Phi(q)$. Zu zeigen $p = q$.

Bew.: $\Phi(p) = \Phi(q)$

$$\Leftrightarrow (p(a_1), p'(a_1), \dots, p^{(m_1-1)}(a_1), \dots, p(a_r), p'(a_r), \dots, p^{(m_r-1)}(a_r)) \\ = (q(a_1), q'(a_1), \dots, q^{(m_1-1)}(a_1), \dots, q(a_r), q'(a_r), \dots, q^{(m_r-1)}(a_r))$$

$$\Leftrightarrow p(a_1) = q(a_1) \wedge p'(a_1) = q'(a_1) \wedge \dots \wedge p^{(m_1-1)}(a_1) = q^{(m_1-1)}(a_1) \\ \wedge \dots \wedge p(a_r) = q(a_r) \wedge p'(a_r) = q'(a_r) \wedge \dots \wedge p^{(m_r-1)}(a_r) = q^{(m_r-1)}(a_r)$$

$$\Leftrightarrow (p - q)(a_1) = 0 \wedge (p - q)'(a_1) = 0 \wedge \dots \wedge (p - q)^{(m_1-1)}(a_1) = 0 \quad (1)$$

$$\wedge \dots \quad \vdots$$

$$\wedge (p - q)(a_r) = 0 \wedge (p - q)'(a_r) = 0 \wedge \dots \wedge (p - q)^{(m_r-1)}(a_r) = 0 \quad (r)$$

Ist $p - q = 0$ das Nullpolynom, so sind alle Bedingungen (1) bis (r) erfüllt.

Annahme: es gibt noch weitere Lösungen $p - q \neq 0$, für die die Bedingungen (1) bis (r) gelten.

Dann folgt aus den Bedingungen (1) bis (r):

- $p - q$ besitzt eine Nullstelle a_1 , die mindestens die Vielfachheit m_1 hat.

- ...

- $p - q$ besitzt eine Nullstelle a_r , die mindestens die Vielfachheit m_r hat.

$\Rightarrow p - q$ lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$(p - q)(x) = c \cdot (x - a_1)^{\mu_1} \cdot \dots \cdot (x - a_r)^{\mu_r} \cdot s(x), \quad c \in \mathbb{R} \wedge \mu_i \geq m_i \text{ für } i = 1, \dots, r \wedge s \in V_d \text{ ein Polynom.}$$

Hieraus folgt einerseits:

$$\deg(p - q) \geq \mu_1 + \dots + \mu_r \geq m_1 + \dots + m_r = \sum_{j=1}^r m_j = d + 1 \text{ (nach Voraussetzung).}$$

$$\text{Also: } \deg(p - q) \geq d + 1 \quad (\text{I})$$

Andererseits gilt:

$$p \in V_d \wedge q \in V_d \Rightarrow p + \underbrace{(-q)}_{\in V_d} =: p - q \in V_d, \text{ da } V_d \text{ ein } \mathbb{R}\text{-Vektorraum und somit}$$

$(V_d, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

$$p - q \in V_d \xRightarrow{Df.} \deg(p - q) \leq d \quad (\text{II})$$

Die Bedingungen (I) und (II) stehen im Widerspruch zueinander:

$\Rightarrow$ Die Annahme $p - q \neq 0$ ist falsch.

$\Rightarrow p - q$ muss das Nullpolynom sein: $p - q = 0 \Leftrightarrow p = q$, was zu zeigen war.

Damit ist bewiesen, dass $\Phi : V_d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ injektiv ist.

3. Dass Φ auch surjektiv und somit bijektiv ist, ergibt sich aus Korollar 3 aus „Lineare Algebra“ von Gerd Fischer (S. 118):

Satz: Seien V, W K -Vektorräume mit $\dim V = \dim W < \infty$, sei $F : V \rightarrow W$ K -linear. Dann sind die Bedingungen F injektiv, F surjektiv, F bijektiv gleichwertig.

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind im vorliegenden Fall erfüllt, denn:

$K = \mathbb{R}$, $V = V_d$ und $W = \mathbb{R}^{d+1}$ sind $\mathbb{R}$ -Vektorräume mit gleicher endlicher Dimension, nämlich:

$\dim V_d = d + 1 < \infty$ $(1, x, \dots, x^d)$ ist Basis von V_d und

$\dim \mathbb{R}^{d+1} = d + 1 < \infty$ $(e_1, \dots, e_{d+1})$ ist Basis von $\mathbb{R}^{d+1}$.

Außerdem ist $\Phi : V_d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ $\mathbb{R}$ -linear (bereits gezeigt).

$\xRightarrow{\text{SATZ}}$ Φ ist bijektiv.

Aus 1.(a), 1.(b), 2. und 3.: $\Phi : V_d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraumisomorphismus.

Aufgabe 4

$U, W \subset \mathbb{R}^5$ Untervektorräume

$$U = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = \text{span}(u_1, u_2, u_3)$$

$$W = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{span}(w_1, w_2, w_3)$$

(a) Bestimmung von $\dim U$:

Es gilt: $u_3 = 1 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 \Rightarrow \{u_1, u_2, u_3\}$ linear abhängig.

u_1 und u_2 sind (offensichtlich) linear unabhängig, denn:

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \cdot u_1 = u_2$ führt u.a. auf die unerfüllbare Bedingung $\lambda \cdot 0 = 1$.

$\Rightarrow U = \text{span}(u_1, u_2, u_3) = \text{span}(u_1, u_2)$ und (u_1, u_2) ist eine Basis von U .

$\Rightarrow \dim U = 2$.

(b) Bestimmung von $\dim W$:

Prüfe, ob $\{w_1, w_2, w_3\}$ linear abhängig oder linear unabhängig ist.

Ansatz: $\lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2 + \lambda_3 \cdot w_3 = 0$ (*)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
2\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\
& & 3\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\
3\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\
\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\
3\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
A \cdot \lambda = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \Rightarrow \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \\ \Rightarrow -2\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = 0 \\ \Rightarrow 4\lambda_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_3 = 0 \\ \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \text{ erfüllt} \\ \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \text{ erfüllt} \end{array}$$

$\Rightarrow \{w_1, w_2, w_3\}$ linear unabhängig (also $\text{rang } A = 3$)
(*)

$\Rightarrow (w_1, w_2, w_3)$ ist eine Basis von W

$\Rightarrow \dim W = 3$.

(c) Bestimmung von $U \cap W$ und $\dim U \cap W$:

Sei $v \in U \cap W \Leftrightarrow v \in U \wedge v \in W$

$\Rightarrow$ es gibt $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \mid v = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2$

und es gibt $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R} \mid v = \mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2 + \mu_3 \cdot w_3$

$\Rightarrow \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 - \mu_1 \cdot w_1 - \mu_2 \cdot w_2 - \mu_3 \cdot w_3 = 0$

$$\begin{aligned}
4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\mu_1 - 4\mu_2 - 2\mu_3 &= 0 \\
\lambda_2 - 3\mu_2 - 2\mu_3 &= 0 \\
2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\mu_1 - 2\mu_2 - 3\mu_3 &= 0 \\
4\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - 3\mu_2 - \mu_3 &= 0 \\
4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 3\mu_1 - \mu_2 &= 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 2 & -2 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{2}\mu_3 \\ \lambda_2 &= -\mu_3 \\ \mu_1 &= -\mu_3 \\ \mu_2 &= -\mu_3 \\ \mu_3 &\in \mathbb{R} \text{ beliebig} \end{aligned}$$

$$\text{Aus } v = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2$$

$$\Rightarrow v = -\frac{1}{2}\mu_3 \cdot u_1 - \mu_3 \cdot u_2$$

$$= \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{also: } v = \mu'_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Probe: Aus } v = \mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2 + \mu_3 \cdot w_3$$

$$\Rightarrow v = -\mu_3 \cdot w_1 - \mu_3 \cdot w_2 + \mu_3 \cdot w_3 = -\mu_3 \cdot (w_1 + w_2 - w_3)$$

$$v = -\mu_3 \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = -\mu_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U \cap W = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

$$\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \text{ ist eine Basis von } U \cap W$$

$$\dim U \cap W = 1$$

(d) Bestimmung von $\dim(U + W)$:

Nach der Dimensionsformel für Summen (siehe Fischer S. 100) gilt:

$U, W, U \cap W \subset \mathbb{R}^5$ sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^5$

$$\Rightarrow \dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$$\Rightarrow \dim(U + W) = 2 + 3 - 1$$

$$\Leftrightarrow \dim(U + W) = 4$$

Aufgabe 5

(a)

$T \subset Gl(n, \mathbb{R})$ sei die Menge der Diagonalmatrizen.

zu zeigen: T ist eine kommutative Untergruppe von $Gl(n, \mathbb{R})$.

Beweis:

1. zu zeigen: $A, B \in T \Rightarrow A \cdot B \in T$

Seien $A, B \in T$. Dann haben A und B die Form:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}, a_{jj}, b_{jj} \in \mathbb{R} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} \text{ ist wieder eine Diagonalmatrix} \quad (\alpha)$$

Weiterhin: $A \in T \subset Gl(n, \mathbb{R})$

$\Rightarrow A$ ist invertierbar.

$\Leftrightarrow \text{rang } A = n$

$\Leftrightarrow a_{jj} \neq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Ebenso: $B \in T \subset Gl(n, \mathbb{R})$

$\Rightarrow B$ ist invertierbar.

$\Leftrightarrow \text{rang } B = n$

$\Leftrightarrow b_{jj} \neq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

$\Rightarrow a_{jj} \cdot b_{jj} \neq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

$\Leftrightarrow \text{rang}(A \cdot B) = n$

$\Leftrightarrow A \cdot B$ ist invertierbar.

$\Leftrightarrow A \cdot B \in Gl(n, \mathbb{R})$ (β)

Auf (α) und (β) folgt: $A \cdot B \in T$.

2. In T gilt das Assoziativgesetz, denn:

$Gl(n, \mathbb{R})$ ist mit der Multiplikation von Matrizen als Verknüpfung eine Gruppe, deshalb gilt das Assoziativgesetz in $Gl(n, \mathbb{R})$ und wegen $T \subset Gl(n, \mathbb{R})$ gilt das Assoziativgesetz auch in T .

3. In T gilt das Kommutativgesetz, denn:

$A, B \in T$ beliebig.

$$\begin{aligned} \Rightarrow A \cdot B &= \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} \stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = B \cdot A. \end{aligned}$$

(*) die Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist kommutativ.

4. Die n -reihige Einheitsmatrix

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in T \text{ ist das neutrale Element in } T.$$

Es gilt: $A \cdot E_n = A = E_n \cdot A \quad \forall A \in T$.

5. $A \in T \Rightarrow A \in Gl(n, \mathbb{R})$

Dann folgt (nach Def. von $Gl(n, \mathbb{R})$):

zu A gibt es ein Inverses A' in $Gl(n, \mathbb{R})$, nämlich die Diagonalmatrix

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}.$$

$A' \in T$, denn:

Aus $a_{jj} \neq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow a_{jj}^{-1} \neq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$.

$\Rightarrow \text{rang } A' = n \Rightarrow A' \in T \subset Gl(n, \mathbb{R})$.

A' ist invers zu A , denn:

$$A \cdot A' = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = E_n.$$

wegen 3. gilt entsprechend: $A' \cdot A = E_n$.

Mit 1. bis 5. ist gezeigt, dass T eine kommutative Untergruppe von $Gl(n, \mathbb{R})$ ist. $\square$

(b)

Aus Aufgabe (a): T ist die Menge aller Diagonalmatrizen, bei denen sämtliche Diagonalelemente ungleich 0 sind.

Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$, sei $D \in T$ beliebig

$\Rightarrow D = (d_{jk}), j, k \in \{1, \dots, n\}$

$\wedge d_{jk} = 0$, für $j \neq k \quad \wedge \quad d_{jk} \neq 0$, für $j = k$ (*)

$\Rightarrow A \cdot D = (c_{ik}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$, wobei für (c_{ik}) gilt:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot d_{jk} = \underbrace{\sum_{j \neq k} a_{ij} \cdot \underbrace{d_{jk}}_{\substack{=0 \\ *}}}_{=0} + a_{ik} \cdot d_{kk}$$

Also gilt: $A \cdot D = (c_{ik})$ mit $c_{ik} = a_{ik} \cdot d_{kk} \quad i, k \in \{1, \dots, n\}$ (I)

Die gleichen Matrizen A und D wie oben werden nun mit lediglich veränderten Indexvariablen wie folgt notiert:

$$A = (a_{jk}) \in M(n \times n, \mathbb{R}) \text{ und}$$

$$D = (d_{ij}) \quad i, j \in \{1, \dots, n\} \wedge \underbrace{d_{ij} = 0 \text{ für } j \neq i \wedge d_{ij} \neq 0 \text{ für } j = i}_{(**)}$$

$\Rightarrow D \cdot A = (c'_{ik}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$, wobei für c'_{ik} gilt:

$$c'_{ik} = \sum_{j=1}^n d_{ij} \cdot a_{jk} = \sum_{j \neq i} \underbrace{d_{ij}}_{\substack{=0 \\ (**)}} \cdot a_{jk} + d_{ii} \cdot a_{ik}.$$

$$\text{Also gilt: } D \cdot A = (c'_{ik}) \text{ mit } c'_{ik} = d_{ii} \cdot a_{ik} \quad i, k \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{II})$$

Nach Vor. soll gelten: $AD = DA$ für alle $D \in T$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow c_{ik} = c'_{ik} \text{ für jedes } i, k \in \{1, \dots, n\} \\ &\stackrel{(I) \wedge (II)}{\Leftrightarrow} a_{ik} \cdot d_{kk} = d_{ii} \cdot a_{ik} \\ &\stackrel{(I) \wedge (II)}{\Leftrightarrow} a_{ik} \cdot (d_{kk} - d_{ii}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III})$$

$$\begin{aligned} \text{Ist } k = i &\stackrel{(III)}{\Rightarrow} a_{ii} \cdot (d_{ii} - d_{ii}) = 0 \\ &\Leftrightarrow a_{ii} \cdot 0 = 0 \quad a_{ii} \in \mathbb{R} \text{ beliebig.} \end{aligned}$$

Sei nun $k \neq i$: Gleichung (III): $a_{ik} \cdot (d_{kk} - d_{ii}) = 0$ soll n. Vor. für alle (invertierbaren) Diagonalmatrizen D , also für jede beliebige Wahl der Diagonalelemente $d_{kk}, d_{ii} \neq 0$ gelten (insbesondere auch in den überabzählbaren unendlich vielen Fällen, in denen $d_{kk} - d_{ii} \neq 0$ ist).

$$\stackrel{(III)}{\Rightarrow} a_{ik} = 0 \text{ für } k \neq i, \quad i, k \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{IV})$$

Damit ist bewiesen: Die Matrix A ist wegen (IV) eine Diagonalmatrix. $\square$