

Übungsblatt 12  
Jan Hendrik Dithmar  
Übungsgruppe 2

### Aufgabe 1

(a)

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \neq \emptyset$$

$$(1, 1) \in U, \text{ da } y = 1 \geq 0 \text{ gilt.}$$

$$\text{aber: } (-1) \cdot (1, 1) = (-1, -1) \notin U, \text{ da } y = -1 \geq 0 \text{ nicht gilt.}$$

$\Rightarrow U$  ist kein Untervektorraum des  $\mathbb{R}^2$ .

(b)

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \neq \emptyset$$

$$(0, 1) \in S, \text{ da } 0^2 + 1^2 \leq 1 \text{ (w)}$$

$$(1, 0) \in S, \text{ da } 1^2 + 0^2 \leq 1 \text{ (w)}$$

$$\text{aber: } (0, 1) + (1, 0) = (1, 1) \notin S, \text{ da } 1^2 + 1^2 \leq 1 \text{ nicht gilt.}$$

$\Rightarrow S$  ist kein Untervektorraum des  $\mathbb{R}^2$ .

(c)

$$W := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

ist kein Untervektorraum des  $\mathbb{R}^2$ , denn:

das neutrale Element  $(0, 0) \notin W$ , somit ist  $(W, +)$  keine (abelsche) Gruppe und damit kann  $W$  kein Vektorraum sein.

### Aufgabe 2

Vektorraum  $V_d = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq d\}$ ,  $d \geq 2$ .

$\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^d)$  ist eine Basis von  $V_d$ ,

$$\Rightarrow \dim V_d = d + 1.$$

(a)

$U_1 = \{p \in V_d \mid p(0) = 0\}$  ist ein Untervektorraum von  $V_d$ , denn:

UV 1:

$U_1 \neq \emptyset$ , denn  $p(x) = x^2 \in U_1$ , da  $p(0) = 0$  ist.

UV 2:

$$p_1, p_2 \in U_1 \Rightarrow p_1(0) = 0 \text{ und } p_2(0) = 0$$

$$\Rightarrow (p_1 + p_2)(0) = p_1(0) + p_2(0) = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow p_1 + p_2 \in U_1.$$

UV 3:

$$\text{Sei } \lambda \in \mathbb{R}; p \in U_1 \Rightarrow p(0) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda p)(0) = \lambda \cdot p(0) = \lambda \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda p \in U_1.$$

Bestimmung einer Basis von  $U_1$ :

$$\text{Ist } p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d \in U_1 \text{ beliebig. } \Rightarrow p(0) = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$$

$$\Rightarrow p(x) = a_1x + \dots + a_dx^d.$$

Jedes Polynom  $p(x) \in U_1$  lässt sich also eindeutig als Linearkombination von Polynomen aus  $\mathcal{B}_1 = (x, x^2, \dots, x^d)$  darstellen.

$$\Rightarrow \mathcal{B}_1 = (x, x^2, \dots, x^d) \text{ ist eine Basis von } U_1$$

$$\Rightarrow \dim U_1 = d.$$

(b)

$U_2 = \{p \in V_d \mid p(0) = 1\}$  ist kein Untervektorraum von  $V_d$ , denn:

$$p(x) = x + 1 \in U_2, \text{ da } p(0) = 1$$

$$q(x) = 2x + 1 \in U_2 \text{ da } q(0) = 1$$

aber: für  $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = 3x + 2$  gilt:

$$(p + q)(0) = p(0) + q(0) = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow p + q \notin U_2.$$

(c)

$U_3 = \{p \in V_d \mid p(1) = 0\}$  ist ein Untervektorraum von  $V_d$ , denn:

UV 1:

$$U_3 \neq \{0\}, \text{ denn } p(x) = x - 1 \in U_3, \text{ da } p(1) = 0 \text{ ist.}$$

UV 2:

$$p_1, p_2 \in U_3 \Rightarrow p_1(1) = 0 \text{ und } p_2(1) = 0.$$

$$\Rightarrow (p_1 + p_2)(1) = p_1(1) + p_2(1) = 0 + 0 = 0.$$

$$\Rightarrow p_1 + p_2 \in U_3.$$

UV 3:

$$\text{Sei } \lambda \in \mathbb{R}; p \in U_3 \Rightarrow p(1) = 0.$$

$$\Rightarrow (\lambda p)(1) = \lambda \cdot p(1) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

$$\Rightarrow \lambda p \in U_3.$$

Bestimmung einer Basis von  $U_3$ :

$$\text{Sei } p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_dx^d \in U_3 \text{ bel. } \Rightarrow p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_d = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 = -a_1 - a_2 - \dots - a_d$$

$$\Rightarrow p(x) = (-a_1 - a_2 - \dots - a_d) + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_dx^d$$

$$\Leftrightarrow p(x) = (a_1 \cdot x - a_1) + (a_2x^2 - a_2) + \dots + (a_dx^d - a_d)$$

$$\Leftrightarrow p(x) = a_1 \cdot (x - 1) + a_2 \cdot (x^2 - 1) + \dots + a_d \cdot (x^d - 1)$$

Jedes Polynom  $p(x) \in U_3$  lässt sich also eindeutig als Linearkombination von Polynomen aus  $\mathcal{B}_3 = (x - 1, x^2 - 1, \dots, x^d - 1)$  darstellen.  $\mathcal{B}_3$  ist somit eine Basis

von  $U_3 \Rightarrow \dim U_3 = d$ .

(d)

$U_4 = \{p \in V_d \mid \int_0^1 p(x)dx = 0\}$  ist ein Untervektorraum von  $V_d$ , denn:

UV 1:

$U_4 \neq \emptyset$ , denn  $p(x) = x - \frac{1}{2} \in U_4$ , da

$$\int_0^1 (x - \frac{1}{2})dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

UV 2:

$$p_1, p_2 \in U_4 \Rightarrow \int_0^1 p_1(x)dx = 0 \text{ und } \int_0^1 p_2(x)dx = 0.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^1 (p_1 + p_2)(x)dx &= \int_0^1 (p_1(x) + p_2(x))dx \\ &= \int_0^1 p_1(x)dx + \int_0^1 p_2(x)dx = 0 + 0 = 0 \\ \Rightarrow p_1 + p_2 &\in U_4. \end{aligned}$$

UV 3:

$$\begin{aligned} \text{Sei } \lambda \in \mathbb{R}, p \in U_4 &\Rightarrow \int_0^1 p(x)dx = 0 \\ \Rightarrow \int_0^1 (\lambda p)(x)dx &= \int_0^1 \lambda \cdot p(x)dx = \lambda \cdot \int_0^1 p(x)dx = \lambda \cdot 0 = 0 \\ \Rightarrow \lambda p &\in U_4. \end{aligned}$$

Bestimmung einer Basis von  $U_4$ :

Sei  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_dx^d \in U_4$  beliebig.

$$\Rightarrow \int_0^1 p(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_dx^d)dx = 0.$$

$$\left[ a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \dots + \frac{1}{d+1}a_dx^{d+1} \right]_0^1 = 0.$$

$$\Rightarrow a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \dots + \frac{1}{d+1}a_d = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 = -\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{3}a_2 - \dots - \frac{1}{d+1}a_d$$

$$\Rightarrow a_0 = -\sum_{j=1}^d \frac{1}{j+1}a_j.$$

$$\Rightarrow p(x) = -\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{3}a_2 - \dots - \frac{1}{d+1}a_d + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_dx^d$$

$$p(x) = a_1(x - \frac{1}{2}) + a_2(x^2 - \frac{1}{3}) + \dots + a_k(x^k - \frac{1}{k+1}) + \dots + a_d(x^d - \frac{1}{d+1})$$

$$\Leftrightarrow p(x) = \sum_{j=1}^d a_j \left( x^j - \frac{1}{j+1} \right)$$

Jedes Polynom  $p(x) \in U_4$  lässt sich also eindeutig als Linearkombination von Polynomen aus  $\mathcal{B}_4 = \left( x - \frac{1}{2}, x^2 - \frac{1}{3}, \dots, x^d - \frac{1}{d+1} \right) = \left\{ \left( x^j - \frac{1}{j+1} \right) \mid j = 1, \dots, d \right\}$  darstellen.  $\mathcal{B}_4$  bildet somit eine Basis von  $U_4$ .  $\Rightarrow \dim U_4 = d$ .

(e)

$U_5 = \{p \in V_d \mid p'(0) + p''(0) = 0\}$  ist ein Untervektorraum von  $V_d$ , denn:

UV 1:

$U_5 \neq \emptyset$ , denn:  $p(x) = x^2 - 2x \in U_5$ , da

$$\begin{aligned} p'(x) &= 2x - 2 \\ \Rightarrow p'(0) &= -2 \\ p''(x) &= 2 \\ \Rightarrow p''(0) &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p'(0) + p''(0) = -2 + 2 = 0$$

UV 2:

$$\begin{aligned} p_1, p_2 \in U_5 &\Rightarrow p_1'(0) + p_1''(0) = 0 \text{ und } p_2'(0) + p_2''(0) = 0 \\ \Rightarrow (p_1 + p_2)'(0) + (p_1 + p_2)''(0) &= (p_1 + p_2)'(0) + ((p_1 + p_2)'(0))' \\ &= (p_1 + p_2)'(0) + (p_1'(0) + p_2'(0))' = (p_1'(0) + p_2'(0)) + (p_1''(0) + p_2''(0)) \\ &= (p_1'(0) + p_1''(0)) + (p_2'(0) + p_2''(0)) = 0 + 0 = 0 \\ \Rightarrow p_1 + p_2 &\in U_5. \end{aligned}$$

UV 3:

$$\begin{aligned} \text{Sei } \lambda \in \mathbb{R}, p \in U_5 &\Rightarrow p'(0) + p''(0) = 0 \\ \Rightarrow (\lambda p)'(0) + (\lambda p)''(0) &= \lambda p'(0) + ((\lambda p)'(0))' = \lambda p'(0) + (\lambda p'(0))' \\ &= \lambda p'(0) + \lambda p''(0) = \lambda(p'(0) + p''(0)) = \lambda \cdot 0 = 0 \\ \Rightarrow \lambda p &\in U_5 \end{aligned}$$

Bestimmung einer Basis von  $U_5$ :

Sei  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_dx^d \in U_5$  beliebig.  
 $\Rightarrow p'(0) + p''(0) = 0 \quad (*)$

$$\begin{aligned} p'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + d \cdot a_dx^{d-1}, \quad d \geq 2 \\ \Rightarrow p'(0) &= a_1 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p''(x) &= 2a_2 + 6a_3x + \dots + d \cdot (d-1) \cdot a_dx^{d-2}, \quad d \geq 2 \\ (\text{Bem.: für } d=2 \text{ ist } p''(x) &= 2a_2) \\ \Rightarrow p''(0) &= 2a_2 \quad (2) \end{aligned}$$

(1) und (2) eingesetzt in (\*) ergibt:

$$a_1 + 2a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -2a_2 \quad (**)$$

Für  $d = 2$  :

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 \\ \stackrel{(**)}{\Rightarrow} p(x) &= a_0 + (-2a_2)x + a_2x^2 \\ \Leftrightarrow p(x) &= a_0 \cdot 1 + a_2(x^2 - 2x) \end{aligned}$$

Wegen der eindeutigen Darstellung von  $p(x) \in U_5$  als Linearkombination von  $1, x^2 - 2x$  ist  $\mathcal{B}_{d=2} = (1, x^2 - 2x)$  eine Basis von  $U_5$  für  $d = 2$ .

$\Rightarrow \dim U_5 = 2$  für  $d = 2$ .

Für  $d \geq 3$  :

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_dx^d \\ \stackrel{(**)}{\Rightarrow} p(x) &= a_0 + (-2a_2)x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_dx^d \\ \Leftrightarrow p(x) &= a_0 \cdot 1 + a_2 \cdot (x^2 - 2x) + a_3x^3 + \dots + a_dx^d \end{aligned}$$

Wegen der eindeutigen Darstellung von  $p(x) \in U_5$  als Linearkombination von Polynomen aus  $\mathcal{B}_{d \geq 3} = (1, x^2 - 2x, x^3, \dots, x^d)$  ist  $\mathcal{B}_{d \geq 3}$  eine Basis von  $U_5$  für  $d \geq 3$ .

$\Rightarrow \dim U_5 = d$ .

insgesamt:  $\dim U_5 = d$  für  $d \geq 2$ .

(f)

$U_6 = \{p \in V_d \mid p'(0) \cdot p''(0) = 0\}$  ist kein Untervektorraum von  $V_d$ , denn:

Sei  $p(x) = x$ :

$$\begin{aligned} p'(x) &= 1 \\ \Rightarrow p'(0) &= 1 \\ p''(x) &= 0 \\ \Rightarrow p''(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p'(0) \cdot p''(0) = 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow p \in U_6.$$

Sei  $q(x) = x^2$ :

$$\begin{aligned}q'(x) &= 2x \\ \Rightarrow q'(0) &= 0 \\ q''(x) &= 2 \\ \Rightarrow q''(0) &= 2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow q'(0) \cdot q''(0) = 0 \cdot 2 = 0 \Rightarrow q \in U_6.$$

Bilde:

$$\begin{aligned}(p+q)(x) &= p(x) + q(x) = x + x^2 \\ \Rightarrow (p+q)'(x) &= 1 + 2x \Rightarrow (p+q)'(0) = 1 \\ \Rightarrow (p+q)''(x) &= 2 \Rightarrow (p+q)''(0) = 2 \\ \Rightarrow (p+q)'(0) \cdot (p+q)''(0) &= 1 \cdot 2 = 2 \neq 0 \\ \Rightarrow p+q &\notin U_6\end{aligned}$$

### Aufgabe 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

Es ist offensichtlich, dass man bei  $AB$  eine 2x2-Matrix und bei  $BA$  eine 4x4-Matrix erhält. Somit kann man  $AB \neq BA$  auch ohne Rechnung einsehen.

#### Aufgabe 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 25 \\ 125 \end{pmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 8 & 15 & 24 \\ 0 & 7 & 26 & 63 & 124 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 42 & 96 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x_4 = 4 ; x_3 = -6 ; x_2 = 4 ; x_1 = -1$$

$$\Rightarrow \text{Lös}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

#### Aufgabe 5

(a)

Gegeben:  $V$  ein  $\mathbb{F}_p$ -Vektorraum mit  $\dim_{\mathbb{F}_p} V = d$ ,  $d \in \mathbb{N}$  und  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$  der endliche Restklassenkörper mit  $p$  Elementen,  $p$  eine Primzahl.

Beh.:  $V$  hat  $p^d$  Elemente:  $|V| = p^d$ .



Beweis (durch vollständige Induktion über  $\dim_{\mathbb{F}_p} V = d$ ):

*Induktionsanfang:*

$d = 0 \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{F}_p} V = 0 \Leftrightarrow V = \{0_v\}$  (Nullvektorraum)  
 $\Rightarrow |V| = 1 = p^0$  (ok)

*Induktionsannahme:*

Für einen beliebigen Vektorraum  $V$  über  $\mathbb{F}_p$  gelte:  $\dim_{\mathbb{F}_p} V = d \Rightarrow |V| = p^d$ .

*Induktionsbehauptung:*

Dann gilt auch:  $\dim_{\mathbb{F}_p} V = d + 1 \Rightarrow V$  besitzt eine Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_{d+1})$  mit  $(d+1)$  Vektoren.

*Beweis:*

Betrachte  $\text{span}_{\mathbb{F}_p}(v_1, \dots, v_d)$ .  $\text{span}_{\mathbb{F}_p}(v_1, \dots, v_d)$  ist ein Untervektorraum von  $V$  mit der Dimension  $d$ .

$\Rightarrow$   $\text{span}_{\mathbb{F}_p}(v_1, \dots, v_d)$  hat  $p^d$  Elemente.  $\text{span}_{\mathbb{F}_p}(v_1, \dots, v_d)$  besteht aus allen (möglichen) Linearkombinationen, die man aus den Basisvektoren  $v_1, \dots, v_d$  mit Skalaren aus  $\mathbb{F}_p$  bilden kann:

$$v = \overline{r_1} \cdot v_1 + \dots + \overline{r_d} \cdot v_d$$

wobei  $\overline{r_1}, \dots, \overline{r_d} \in \mathbb{F}_p$  jeweils alle Werte aus  $\mathbb{F}_p$  annehmen.

Sei  $v' = \overline{r_1} \cdot v_1 + \dots + \overline{r_d} \cdot v_d + \overline{r_{d+1}} \cdot v_{d+1}$ ,  $\overline{r_{d+1}} \in \mathbb{F}_p$ .

Alle Vektoren  $v'$  entstehen aus den Vektoren  $v$  dadurch, dass man jedem dieser  $p^d$  Vektoren einen Summanden der Form  $\overline{r_{d+1}} \cdot v_{d+1}$  hinzufügt. Dies ist wegen  $\overline{r_{d+1}} \in \mathbb{F}_p$  und  $|\mathbb{F}_p| = p$  auf jeweils  $p$  Arten möglich. Demnach gibt es insgesamt  $p^d \cdot p = p^{d+1}$  verschiedene Vektoren  $v'$ . Der Vektorraum  $V$  mit der Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_d, v_{d+1})$  besteht gerade aus der Gesamtheit der Vektoren  $v'$ .  $V$  hat somit  $p^{d+1}$  Elemente.  $\square$

(b)

Betrachtet wird der  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}$ .

Beh.:  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$ .

Beweis:

Annahme:  $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = r < \infty$ .

$\Rightarrow$  der  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}$  besitzt eine endliche Basis  $(b_1, \dots, b_r)$  der Länge  $r$ .

$\Rightarrow$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gibt es eine eindeutig bestimmte Darstellung als Linearkombination der Basisvektoren mit rationalen Koeffizienten.

Also:

$$x = \alpha_1 \cdot b_1 + \dots + \alpha_r \cdot b_r, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Betrachte alle  $r$ -Tupel der Form  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{Q}^r$ .

Da  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist, ist auch  $\mathbb{Q}^r$  abzählbar. Deshalb gibt es nur abzählbar viele  $r$ -Tupel  $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ .

Folglich können nur abzählbar viele Vektoren  $x \in \mathbb{R}$  gemäß (\*) dargestellt werden.

Daraus folgt, dass  $\mathbb{R}$  abzählbar ist. Dies steht im Widerspruch dazu, dass  $\mathbb{R}$  nicht abzählbar ist.  $\square$