

§32 Wichtige Verteilungen

Es gibt in der Wahrscheinlichkeitstheorie Verteilungen, die sehr häufig auftreten: Binomialverteilung, Poissonverteilung und Normalverteilung.

32.1 Binomialverteilung

Wir betrachten ein Experiment, das aus einer n -fachen Wiederholung eines Einzelexperiments mit zwei verschiedenen Ausgängen 0 und 1 besteht. Das Ergebnis 1 habe die Erfolgswahrscheinlichkeit:

$$\Omega := \{0,1\}^n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots, n\}.$$

32.2 Beispiel

(Zufallsabhängigkeit sportlicher Entscheidungen)

Abel und Kain tragen ein Tischtennistunier mit $n = 1, 3, 5, \dots (2m+1)$ Spielen aus. Wer die Mehrheit der Einzelspiele gewinnt, ist Sieger. Abel gewinnt ein Einzelspiel mit der Wahrscheinlichkeit 0,6. Wie groß sind die Siegchancen für den schlechteren Spieler Kain? Kain siegt, wenn Abel $S_n \leq m$ Erfolge erzielt. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt:

$$P(S \leq m) = \underbrace{b_{n,p}(0)}_{\text{Abel gewinnt kein Spiel}} + \underbrace{b_{n,p}(1)}_{\text{gewinnt ein Spiel}} + \dots + \underbrace{b_{n,p}(m)}_{\text{gewinnt m Spiele}}$$

Pascal-Dreieck:

[illegible]

$$n = 1: P(S_1 \leq 0) = \binom{1}{0} 0,6^0 \cdot 0,4^1 = 0,4$$

$$n = 3: P(S_3 \leq 1) = \binom{3}{0} 0,6^0 \cdot 0,4^3 + \binom{3}{1} 0,6^1 \cdot 0,4^2 = 0,352$$

$$n = 5: P(S_5 \leq 2) = \binom{5}{0} 0,6^0 \cdot 0,4^5 + \binom{5}{1} 0,6^1 \cdot 0,4^4 + \binom{5}{2} 0,6^2 \cdot 0,4^3 = 0,31744$$

$$n = 7: P(S_7 \leq 3) = 0,290$$

$$n = 9: P(S_9 \leq 4) = 0,2665$$

Es ist also gar nicht so unwahrscheinlich, dass der schlechtere Spieler das Tounier gewinnt.

32.3 Die Poisson-Verteilung

Für große n wird das Arbeiten mit der Binomialverteilung unhandlich. Ist p klein ($0 < p < 0,1$), so gibt es eine gute Approximation, die **Poisson-Verteilung**

$$p(k) := \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{mit } \lambda > 0 \text{ und } k = 0, 1, 2, \dots$$

Nun kann man zeigen, dass $p(k)$ für $\lambda = np$ die Binomialverteilung $b_{n,p}(k)$ approximiert. Durch Umbenennung von „Erfolg“ und „Fehl Schlag“ ist die Poisson-Verteilung auch für $0,9 < p < 1$ anwendbar.

32.4 Reales Beispiel (Der große Jubiläumstag)

Genau in einem Jahr feiert ein großer Betrieb seinen hundertsten Geburtstag. Die Direktion beschließt, allen Kindern von Betriebsangehörigen, die an diesem Tag geboren werden, ein Konto mit EUR 3000 anzulegen. Da rund 730 Kinder pro Jahr geboren werden, rechnet man mit Auslagen von EUR 6000. Um Zufallsschwankungen vorzubeugen, plant man EUR 15000. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Geld nicht reicht?

Es werden $n = 730$ Kinder pro Jahr geboren mit Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{365}$, dass der Geburtstag auf den Jubiläumstag fällt $\Rightarrow \lambda = np = 2$. Das Geld reicht nicht, falls $k \geq 6$ Kinder geboren werden.

$$\begin{aligned} P(k \geq 6) &= 1 - P(k \leq 5) = 1 - p(0) - p(1) - \dots - p(5) \\ &= 1 - \frac{2^0}{0!} e^{-2} - \frac{2^1}{1!} e^{-2} - \dots - \frac{2^5}{5!} e^{-2} = 0,0168. \end{aligned}$$

Man braucht nicht mit Zufallsüberraschungen zu rechnen. (Bemerkung: Am Jubiläumstag wurden 36 Kinder geboren! Die Direktion hat es verstanden, ihre Mitarbeiter zu außerbetrieblichen Tätigkeiten zu begeistern.)

32.5 Die Normalverteilung

Die **Normalverteilung** ist ebenfalls eine Approximation an die Binomialverteilung für große n . Im Gegensatz zur Poissonverteilung liefert sie insbesondere für $p \approx 0,5$ gute Approximationen. Viele Zufallsvariablen, die bei Experimenten und Beobachtungen in der Praxis auftreten, sind normalverteilt.

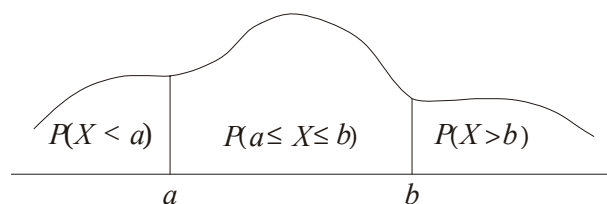
Zufallsvariablen sind nicht immer diskret, sie können auch oft jede beliebige Zahl in einem beliebigen Intervall $[a, b]$ annehmen. Man interessiert sich dann für $P(a \leq X \leq b)$, die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis in $[a, b]$ liegt.

Gibt es in diesem Fall eine Funktion $f(x)$ mit $P(a \leq x \leq b) = \int_b^a f(x) dx$ und

(i) $f(x) \geq 0$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1,$

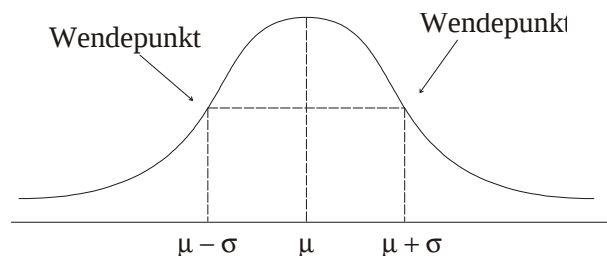
dann nennt man f eine **Dichte**.



Ist x eine kontinuierliche Zufallsvariable mit der Dichte $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, so kann man $P(a \leq x \leq b)$ mit der Stammfunktion $\Phi(x)$ berechnen:

$$P(a \leq x \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

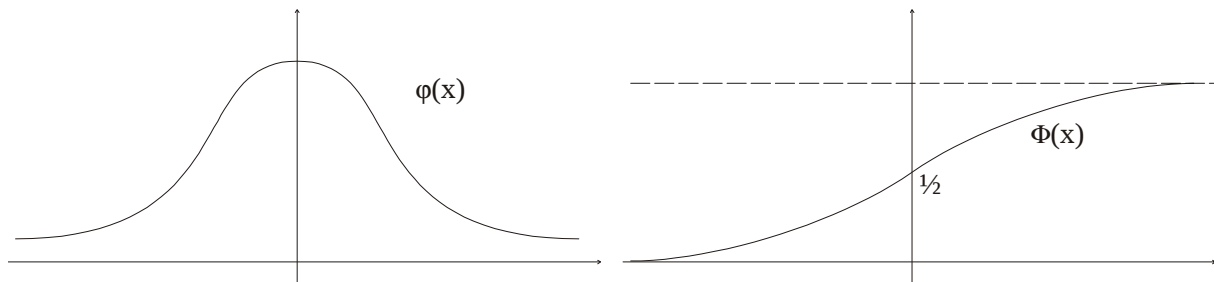
$\phi(x)$ nennt man **normale Dichte** und $\phi(x)$ ist die **Standard-Normalverteilung**.



ϕ ist nicht analytisch auswertbar, liegt aber tabelliert vor. Eine allgemeine Normalverteilung (Gaußverteilung) mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ hat die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{|x-\mu|^2}{2\sigma}\right)$$

Die Standardnormalverteilung entspricht also $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.



Es gilt:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95,5\%$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99,7\%$$

Man kann zeigen: Eine Binomialverteilung mit n Einzelexperimenten mit Wahrscheinlichkeit p lässt sich durch allgemeine Normalverteilung mit Mittelwert $\mu = np$ und Standardabweichung $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ approximieren:

$$b_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \phi\left(\frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

32.6 Beispiel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 6000 Würfeln eines Würfels die Sechs mindestens 1100 Mal auftritt?

Hier ist $n = 6000$, $p = \frac{1}{6}$.

Eine entsprechende Gaußverteilung hat den Mittelwert

$$\mu = np = 1000 \text{ und die Standardabweichung } \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{6000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 28,87\%.$$

