

§30 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

30.1 Beispiel

Aufteilung der 1.500 Angehörigen eines Betriebs nach Geschlecht und Rauchgewohnheiten:

	Frauen B	Männer $\bar{B}$
Raucher A	600	200
Nichtraucher $\bar{A}$	300	400

Ω : Menge der Betriebsangehörigen

A : Menge der Raucher

B : Menge der Frauen

$\bar{A}$: Menge der Nichtraucher

$\bar{B}$: Menge der Männer

Wir lösen eine Person zufällig aus. Dabei treffen folgende Wahrscheinlichkeiten zu:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{800}{1.500} = \frac{8}{15} \quad \text{Raucheranteil } (|A|: \text{Zahl der Elemente in } A)$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{900}{1.500} = \frac{3}{5} \quad \text{Frauenanteil}$$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{600}{1.500} = \frac{2}{5} \quad \text{Anteil der rauchenden Frauen}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$, dass eine Person raucht, falls es sich um eine Frau handelt?

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{600}{900} = \frac{2}{3}$$

andererseits

$$P(A|B) = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Man nennt $P(A|B)$ die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von A unter der Bedingung (Hypothese) B .

Es gilt stets:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Zwei Ereignisse A, B heißen **unabhängig**, falls

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

30.2 Verallgemeinerung

Seien $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$ und $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Dann gilt:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Beweis:

Die rechte Seite lässt sich schreiben als:

$$\cancel{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2)}{\cancel{P(A_1)}} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}} \cdot \dots \cdot \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}{\cancel{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}} = P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \quad \text{q.e.d.}$$

30.3 Beispiel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 6 Würfeln 6 verschiedene Zahlen zu würfeln?

A_1 : irgendein Ergebnis für 1. Würfel ($= \Omega$)

A_2 : ein vom 1. Ergebnis verschiedenes Ergebnis für den 2. Würfel

$\vdots$

A_n : ein von $A_1, \dots, A_5$ verschiedenes Ergebnis für den 6. Würfel

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_6) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot \dots \cdot P(A_6 | A_1 \cap \dots \cap A_5)$$

$$= 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6!}{6^6} \approx 0,015$$

30.4 Beispiel

Ein Krebstest ist mit 96%iger Sicherheit positiv, falls der Patient Krebs hat und mit 94%iger Sicherheit negativ, falls kein Krebs vorliegt. Bei einem Patienten, in dessen Altersgruppe 0,5% aller Personen Krebs haben, verläuft der Test positiv. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Patient tatsächlich Krebs hat?

Ereignis K : Patient hat Krebs

Ereignis T : Test ist positiv

$$P(K | T) = \frac{P(K \cap T)}{P(T)} = \frac{0,005 \cdot 0,96}{0,005 \cdot 0,96 + 0,995 \cdot 0,06} \approx 0,074$$

Der Patient kann also relativ beruhigt sein.

Fazit:

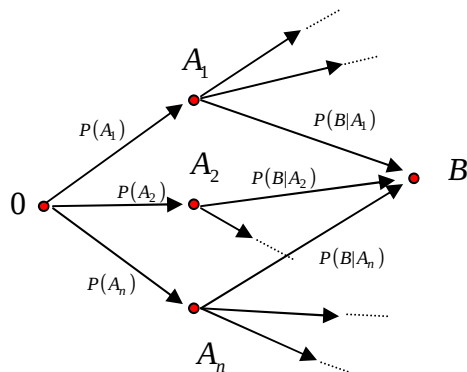
Um eine seltene Krankheit zuverlässig zu erkennen, darf ein Test nur sehr wenige „false positives“ haben.

Satz 30.5 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$ eine disjunkte Zerlegung von Ω in mögliche Ereignisse $A_1, \dots, A_n$. Ferner sei $P(A_i) > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dann gilt für jedes Ereignis B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B | A_i)$$

Veranschaulichung:



Ein Fahrer startet bei 0 und fährt mit Wahrscheinlichkeit $P(A_1), \dots, P(A_n)$ zu den Punkten $A_1, \dots, A_n$.

Die Wahrscheinlichkeit, von dort nach B zu fahren, ist

$$P(B | A_1), \dots, P(B | A_n).$$

Die Gesamtwahrscheinlichkeit, dass der Fahrer nach B gelangt, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade von 0 nach B :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B | A_i)$$

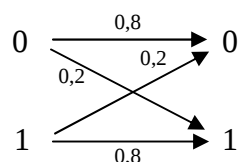
Bemerkung:

Im Beispiel 30.4 haben wir im Nenner bereits den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit verwendet.

30.6 Beispiel

Um einen binären Nachrichtenkanal robuster gegenüber Störungen zu machen, sendet man die Bitfolge 0000000 statt 0 und 1111111 statt 1.

Störungen treten in 20% aller Fälle auf und die Wahrscheinlichkeit für eine Nullfolge sei 0,1. Es wird 0100110 empfangen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 0000000 gesendet wurde?



$$P(0000000 | 0100110) = \frac{0,1 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^4}{0,1 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^4 + 0,9 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^3} \approx 0,308$$

Man wird den Block also als 1 lesen, obwohl die Mehrzahl der empfangenen Bits Nullen sind.

Eng verwandt mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit ist

Satz 30.7 (Formel von Bayes)

Sei $P(B) > 0$ und die Voraussetzungen von Satz 30.5 erfüllt.

Dann gilt:

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B | A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B | A_i)}$$

Beweis:

Folgt aus $P(A_k | B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)}$, indem man

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B | A_i) \quad (\text{Satz 30.5})$$

$$P(A_k \cap B) = P(A_k) \cdot P(B | A_k)$$

einsetzt.

Bemerkung:

In Satz 30.7 wird $P(A_k | B)$ aus $P(B | A_i)$, $i = 1, \dots, n$ berechnet, d.h. Ursache und Wirkung kehren sich um.

Typische Anwendung: Ein Arzt sieht bei einem Patienten das Symptom B . Es kann von n verschiedenen Krankheiten A_k , $k = 1, \dots, n$ verursacht werden. Um die wahrscheinlichste Ursache zu finden, muss man also $P(A_k | B)$ berechnen.