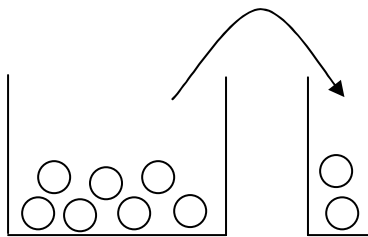


§29 Kombinatorik

Kombinatorik liefert wichtige Modelle zum Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten.

29.1 Zwei äquivalente Sprechweisen

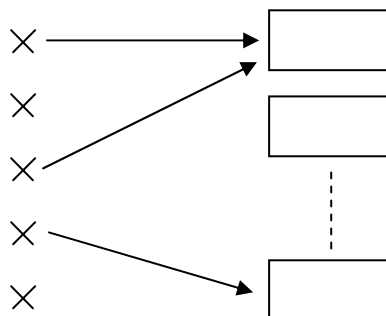
a) Stichprobensprechweise, Urnenmodell



Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Objekten werden k Objekte gezogen.

Dabei kann das Ziehen mit oder ohne Zurücklegen erfolgen und die Reihenfolge eine oder keine Rolle spielen.

b) Zuordnungssprechweise, Schubladenmodell



k Objekte werden in n Schubladen sortiert. Dabei sind die Objekte entweder unterscheidbar oder nicht unterscheidbar und die Schubladen dürfen einfach oder mehrfach besetzt werden.

Urnen- und Schubladenmodell sind äquivalent:

Urnenmodell	Schubladenmodell
mit / ohne Zurücklegen in / ohne Reihenfolge	mit / ohne Mehrfachbesetzung unterscheidbare / ununterscheidbare Objekte

29.2 Vier kombinatorische Grundsituationen

Produktregel: Bei einem k -stufigen Experiment habe der Ausgang einer Stufe keinen Einfluss auf die Anzahl der möglichen Ausgänge bei späteren Stufen. Haben die einzelnen Stufen $n_1, n_2, \dots, n_k$ Ausgänge, so hat das Gesamtexperiment $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ Ausgänge.

a) geordnete Stichprobe mit Wiederholung

Bei k Ziehungen aus einer Urne mit n Objekten mit Zurücklegen gibt es n^k

Möglichkeiten, wenn die Reihenfolge eine Rolle spielt.

Beispiel (aus einem alten Stochastikbuch): Herr Maier will seinen ungezogenen Sohn mit 10 Ohrfeigen bestrafen. Auf wie viele Arten kann er das tun, wenn es bei jedem Schlag eine von zwei Möglichkeiten gibt: links oder rechts?

Es gibt $2^{10} = 1.024$ Möglichkeiten.

b) **geordnete Stichprobe ohne Wiederholung**

Urnenmodell: k Ziehungen aus n Objekten ($k \leq n$) ohne Zurücklegen, aber mit Berücksichtigung der Reihenfolge.

$$\text{Möglichkeiten: } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1. Ziehung}}}{n} \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{k. Ziehung}}}{(n-k+1)} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Spezialfall: $n = k$: $n!$ Möglichkeiten

Für große n approximiert man $n!$ mit der Stirling-Formel: $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Beispiel: Herr Maier will seine 5 Kinder in einer Reihe anordnen für eine Gruppenaufnahme. Hier gibt es $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten.

c) **Ungeordnete Stichprobe ohne Wiederholung**

Wie im Fall (b), jedoch müssen die $k!$ Permutationen der k gezogenen Objekte miteinander identifiziert werden. Daher gibt es $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ Möglichkeiten.

Beispiel: Beim Lottoschein gibt es

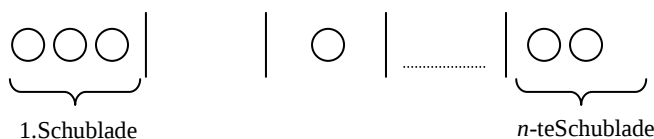
$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13.983.816$$

Möglichkeiten, 6 aus 49 Zahlen anzukreuzen. Die Wahrscheinlichkeit,

6 Richtige zu tippen ist daher $\frac{1}{13.983.816} \approx 7 \cdot 10^{-8}$.

d) **Ungeordnete Stichprobe mit Wiederholung**

Schubladenmodell: Es sollen k nicht unterscheidbare Objekte auf n Schubladen verteilt werden, wobei Mehrfachbesetzung möglich ist.



$n-1$ Schubladentrennungen

Gesamtzustand wird beschrieben durch die Reihenfolge von k nichtunterscheidbaren Objekten und $n-1$ nichtunterscheidbaren Trennungsstrichen

$$\Rightarrow \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1} \text{ Möglichkeiten.}$$

Beispiel: Auf wie viele Arten können 60 Parlamentssitze auf 3 Parteien verteilt werden?

$$\Rightarrow \binom{62}{60} = \binom{62}{2} = \frac{62 \cdot 61}{2 \cdot 1} = 1.891 \text{ Möglichkeiten.}$$